Série 2 : Dérivabilité d'une fonction

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :

a. $f(x) = x^3 - x$ et $a = 2$

b. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ et $a = 1$

c. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $a = -\frac{1}{2}$ à droite.

Exercice 2 :

A - On considère f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; si\ x \neq 0 \\ 0 \quad\quad ; si\ non \end{cases}$.

1. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

B - On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 \ ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{4} \quad ; x \geq 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 3 :

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $h(x) = \sqrt{x}\sin(x) + \cos(x)$; $g(x) = (x^2+1)^5$

2. a. Étudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. En déduire que$(\forall x \in \mathbb{R})$: $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur IR.
2. a. Calculer $f(1)$.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 5 :

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

   a. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ b. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

   c. $f(x) = \sqrt[4]{1+cos^2(x)}$ d. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x}$

2. A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^8+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)-4}{x-1}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit g la restriction de f sur $[1 ;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.

c. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

Série 2 : Dérivabilité d'une fonction

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants :

d. $f(x) = x^3 - x$ et $a = 2$

e. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ et $a = 1$

$f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $a = -\frac{1}{2}$ à droite.

Exercice 2 :

A - On considère f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; si\ x \neq 0 \\ 0 \quad\quad ; si\ non \end{cases}$.

1. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

B - On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 \ ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{4} \quad ; x \geq 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 3 :

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $h(x) = \sqrt{x}\sin(x) + \cos(x)$; $g(x) = (x^2+1)^5$

2. a. Étudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. En déduire que$(\forall x \in \mathbb{R})$: $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur IR.
2. a . Calculer $f(1)$.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Exercice 5 :

3. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

   e. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

   g. $f(x) = \sqrt[4]{1+cos^2(x)}$ h. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x}$

4. A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

   c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^8+1)\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)-4}{x-1}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit g la restriction de f sur $[1 ;+\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.

c. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.