Chapitre 2 : Dérivabilité d'une fonction

I) Dérivabilité d'une fonction numérique :

1) Dérivabilité d'une fonction en un point :

Activité :

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Calculer : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Solution :

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}^2-1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$

Donc dit que la fonction f est dérivable en 2

Le réel $\frac{1}{2}$ est appelée le nombre dérivé en 2, on le note par $f'(2)$

$Donc$: $f'(2)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}^2}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

Donc dit que la fonction f n'est pas dérivable à droite de 1

Remarque :

La fonction f est dérivable en 2 donc elle est dérivable à droite de 2 et dérivable à gauche de 2

Définition :

Une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et a élément de I.
On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l
tel que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ ou bien $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=l$
Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a .
Il est noté $f'(a)$

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x$.

Montrons que f est dérivable en 1

1ère méthode :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} x+3 = 4$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$

2ème méthode :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+t)-f(1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2+2(1+t)-(1^2+2\times 1)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1+2t+t^2+2t+2-3}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t+t^2}{t}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{t(4+t)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} 4+t$$
$$= 4$$

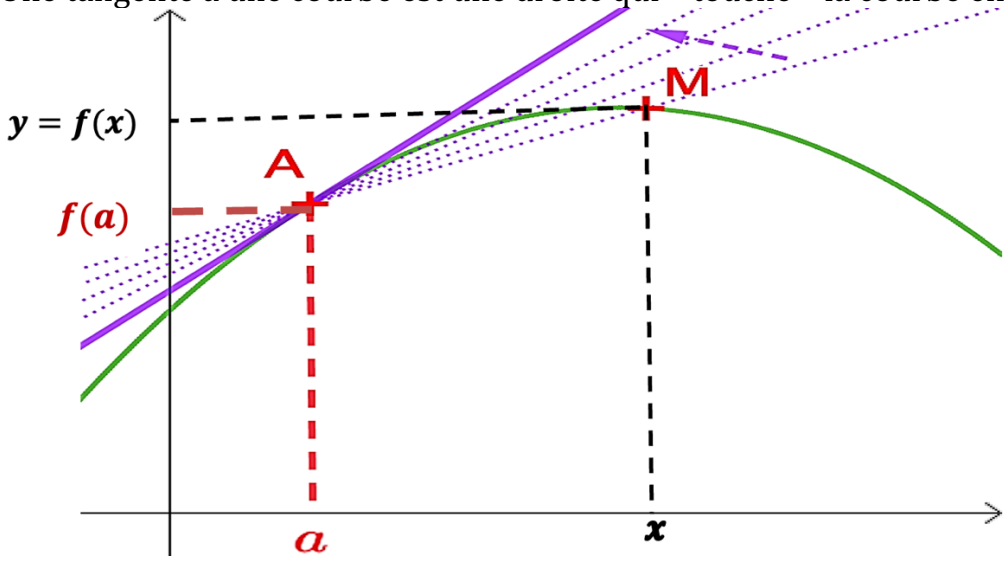
Donc : $\lim_{t\to 0} \frac{f(1+t)-f(1)}{t} = 4$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$

Interprétation géométrique du nombre dérivée :

Soit une fonction dérivable au point d'abscisse a

Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.



Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.

Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable au point d'abscisse a

- La tangente à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$

- La droite (T) d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la tangente à la courbe (Cf), de la fonction f au point d'abscisse a.
- La fonction $x \to f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a

On écrit alors : $f(x) \cong f'(a)(x-a) + f(a)$ au voisinage de a

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a) Montrons que f est dérivable en 1

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

On a : $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$

Une équation de la tangente en 1 est : $y = 2(x-1) + 1$

$Donc$: (T) : $y = 2x - 1$

2. Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; a + r[$

On dit que f est dérivable à droite de a , s'il existe un réel l_d, tel que : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_d$;

Le nombre l_d , est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a.

Il est noté $f'_d(a)$

Interprétation géométrique :

La courbe (C_f) admet une demi-tangente au point $A(a\,;f(a))$

d'équation : (T) : $y = f_d'(a)(x-a) + f(a)$ $tel\ que$ $x > a$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a-r, a]$

On dit que f est dérivable à gauche de a, s'il existe un réel l_g, tel que : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_g$;

Le nombre l_g ,est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a , Il est noté $f'_g(a)$

Interprétation géométrique :

La courbe (Cf) admet une demi-tangente au point A(a ;f(a)) d'équation :

$y = f_g'(a)(x-a) + f(a)$ $tel\ que$ $x < a$

Proposition :

Une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) = f'_g(a)$ et alors : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$

3) Demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$, alors la fonction f non dérivable en a

Interprétation géométrique

- Si $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut
- Si $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas
- Si $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut
- Si $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ alors la courbe (Cf) de f admet au point A(a ;f(a)) une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

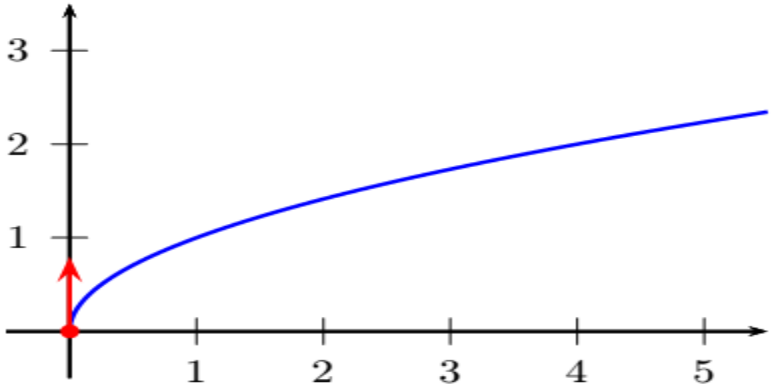
Exemple :

La fonction $x\longrightarrow\sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite de 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Interprétation géométrique

- S la courbe (Cf) de f admet au point O(0 ;0) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut



II) Dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle :

1.Définitions :

- f est dérivable sur l'intervalle ouvert]a; b[ssi f est dérivable en chaque point de l'intervalle]a; b[
- f est dérivable sur]a; b[et dérivable à droite de a et à gauche de b alors f est dérivable sur l'intervalle [a; b]
- si f est dérivable sur l'intervalle I alors la fonctions dérivée de f sur I est la fonction définie sur par : $(\forall x\in I);\ f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2.Fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$

$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^n \ ; (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = a \times n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = ax^n$ $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$f'(x) = a \times n \times x^{n-1}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.Opérations sur les fonctions dérivables :

Proposition : f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$; Alors

• $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	• $(kf)'(x) = k \times f'(x)$
• $(f.g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$	• $(f^n)'(x) = n\big(f(x)\big)^{n-1} \times f'(x)$
• Si g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$	• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$
• Si f est strictement positive sur I alors : $\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux nombres réels ($a \neq 0$).

Et soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax + b) \notin I$

La fonction $g: x \to f(ax + b)$ est dérivable sur l'intervalle J

Et on a : $(\forall x \in J)$; $g'(x) = af'(ax + b)$

Exemple :

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = cos(2x + 1)$

En considérant la fonction f définie sur R par : $f(x) = cosx$

On a : $g(x) = f(2x + 1)$, donc $g'(x) = -2f'(2x + 1)$

D'où : $(\forall x \in R)$; $g'(x) = -2\ sin(2x + 1)$

Résultat :

Toute fonction polynôme est dérivable sur IR.

Tout fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

4) Sens des variations d'une fonction

Proposition : f une fonction dérivable sur un intervalle I

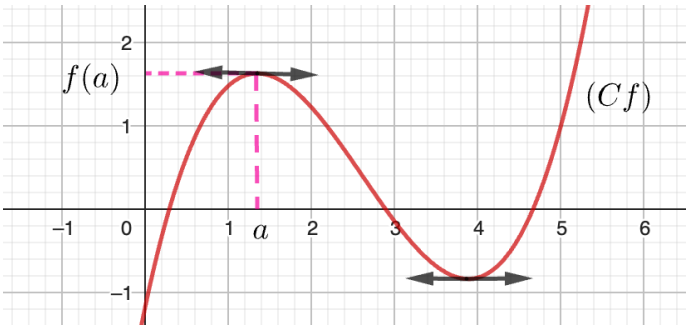
- $(\forall x \in I);\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est croisante sur I
- $(\forall x \in I);\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est décroisante sur I
- $(\forall x \in I);\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est constante sur I

III) Extremums d'une fonction dérivable :

Toute valeur maximale ou minimale d'une fonction est appelée un extremum de la fonction f

Propriété : Soit f une fonction derivable sur un intervalle ouvert I et a un element de I .

Si f admet un extremum local au point a , alors $f'(a) = 0$



Remarque :

Si $f'(a) = 0$ alors $f(a)$ n'est pas nécessairement un extremum local de la fonction f .

Prenons par exemple la fonction $f : x \to 2x^3$

On a : $f'(x) = 6x^2$ pour tout reel x ,

Donc f' s 'annule en 0.

Et pourtant : $(\forall x \in IR^+);\ f(x) \geq f(0)$

Et $(\forall x \in IR^-);\ f(x) \leq f(0)$

D'où : $f(0)$ n'est pas un extremum de la fonction f de R

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum locale de la fonction f sur I

IV) Dérivée de la fonction composée - fonction Réciproque :

1)Dérivée de la fonction composée

Activité :

Soit f et g deux fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \cos(x)$; $g(x) = x^2 - 2x$

1) Calculer f'(x) et g'(x) pour tout x ∈ IR
2) Calculer $f'(x) \times g'(f(x))$
3) Soit h(x) = gof(x) Déterminer h(x) puis calculer h'(x)
4) Comparer $h'(x)$et $f'(x) \times g'(f(x))$

Proposition :

- Si f est dérivable en un réel a et g dérivable en f(a) alors la fonction composée gof est dérivable en a et $gof'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$
- Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction composée gof est dérivable sur I et de plus, pout tout $x \in I$: $gof'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

2) Dérivée de la fonction Réciproque :

Proposition :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un un intervalle I

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' s'annule pas sur I Alors la fonction f^{-1}est dérivable sur $J = f(I)$.

De plus on a pour tout x ∈ J : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Démonstration :

Soit x ∈ J = f(I) , on a : $fof^{-1}(x) = x$
Donc : $f'[f^{-1}(x)] \times (f^{-1})'(x) = 1$

Donc : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Corollaire :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de IR , et a ∈ I et b ∈ J tel que $f(a) = b$
Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$
Alors la fonction f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

3) Dérivée de la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$

Activité :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2
Considérons la fonction u définit sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt[n]{x}$
1.Etudier la dérivabilité de u à droite de 0
2.Calculer la dérivée de la fonction u

Proposition :

La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur IR_*^+
Et on a pour tout $x \in IR_*^+$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

4) Dérivée de la fonction $x \to x \to \sqrt[n]{f(x)}$

Proposition :

Si f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I ,
Alors la fonction $x \to \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{n \times (\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$$