Exercice 01

Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\ ;\ x\neq 4 \\ f(4)=4 \end{cases}$ en $x_0=4$; 2) $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+4}{6-3x}\ ;x\leq 1 \\ f(x)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}\ ;x>1 \end{cases}$, en 1

3) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\sqrt{3}\,x)}{12\,x}\ ;\ x>0 \\ f(x)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{x^2}\ ;x<0 \\ f(0)=\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$; en $x_0=0$; 4) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}\ ;\ x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$ en 1

Exercice 02

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x)=\frac{sin(\pi x)}{x-3};\ x\neq 3 \\ f(3)=a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 3

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3+x^2+x-a}{x-1}\ ,\ x\neq 1 \\ f(1)=b \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Exercice 03

Étudier la continuité de la fonction f sur I dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^3+\sqrt{2}\,x^2+x-3$, $I=\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$, $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=2\sqrt{x}+x^3+3$; $I=[0,+\infty[$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-x+3}$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 04

f une fonction Définie sur $[-2;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}\ ;x>2 \\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2};-2\leq x<2 \\ f(2)=\frac{8}{3} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $[-2;+\infty[$

Exercice 05

Soient f une fonction définie par $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

2) Déterminer $f(]-\infty,2[)$, $(]2,+\infty[)$ et $f([3,4])$

Exercice 06

1) Montrer que l'équation $x^{2025}+\sqrt{x}-1=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x)+x+\frac{1}{2}=0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6},0]$

3) Montrons que l'équation $x^5+x^3+x=1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0<\alpha<1$

4) Montrer que l'équation $x^3-\frac{1}{x}-7=0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$ puis vérifier que $\alpha\in[\frac{3}{2},2]$

Exercice 07

f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2-5$.

1) Étudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha\in]2;4[$.

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

4) Étudier le singe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-contre

Déterminer le nombre de solution des équations suivantes

Puis encadrer ces solutions.

1) $f(x)=18$; 2) $f(x)=0$

3) $f(x)=-3$; 4) $f(x)=3$

x	-4		-3		-1		1
f		↗	3	↘	-1	↗	19

Exercice 09

f une fonction définit sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J que l'on déterminera

2) Déterminer la fonction f^{-1} pour tout x dans J

Exercice 10

Soit f la fonction définit sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Soit g la restriction de f sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définit sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction *réciproque de* g

c) Résoudre dans $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Exercice 11

Soit h une fonction définie sur $]-1;\ 1[$ par : $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h

2) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J (à déte...

3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 12

1) a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{4}$

b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$

$(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations (I): $(x-3)^3 < 7$; $2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}-8x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

Exercice 14

Montrer que : $\frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 1$; *et que* $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt[4]{4}}}{2\sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Exercice 15

Soit f une fonction définit par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2-1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [1; +\infty[$

a) Étudier le sens de variations de g sur I

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f(\frac{-1}{4})$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

c) Montrer que $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

d) En déduire que $\alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0$

Exercic 01

Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\ ;\ x\neq 4 \\ f(4)=4 \end{cases}$ en $x_0=4$; 2) $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+4}{6-3x}\ ;x\leq 1 \\ f(x)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}\ ;x>1 \end{cases}$ en 1

3) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\sqrt{3}\,x)}{12\,x}\ ;\ x>0 \\ f(x)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+cosx}}{x^2}\ ;x<0 \\ f(0)=\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$; en $x_0=0$; 4) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}\ ;\ x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$ en 1

Solution :

1) Soit la fonction f définit par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \\ f(4)=4 \end{cases}$; $x\neq 4$

Etudier la continuité de f en 4 .

➢ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)\,(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2$

$=4$

Donc $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$

D'où f est continue en 4

2) Soit f une fonction définit par $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+4}{6-3x}\ ;x\leq 1 \\ f(x)=\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}\ ;x>1 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 1 .

On a $f(1)=\frac{2+4}{6-3}=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+4}{6-3x}$

$=\frac{2+4}{6-3}$

$=2$

$=f(1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$;

D'où f est continue à gauche de $a=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\,(x^2-5x+6)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-5x+6)$

$=2$

$=f(1)$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

algorithme de HORNER :

x^3	x^2	x	1	
1	−6	11	−6	1
	1	−5	6	

$1\times 1+(-6)=-5$; $(-5)\times 1+(11)=6$

On obtient :

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$

D'où f est continue à droite de 1

3) Soit la fonction f définit par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\sqrt{3}\,x)}{12\,x}\ ;\ x>0 \\ f(x)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+cosx}}{x^2}\ ;x<0 \\ f(0)=\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$

Étudier la continuité de f en 0 .

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3}\,\sin(x)}{12\,x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{\sin(x)}{x}$ *Rappel*: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}=f(0)$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\sqrt{2+cosx}-\sqrt{3}}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to0^-} \frac{(\sqrt{2+cosx}-\sqrt{3})(\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})}{x^2\ (\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to0^-} \frac{(\sqrt{2+cosx})^2-\sqrt{3}^2}{x^2\ (\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to0^-} \frac{2+cosx-3}{x^2\ (\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to0^-} \frac{cosx-1}{x^2\ (\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})}$$
$$= \lim_{x\to0^-} -\frac{(1-cosx)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+cosx}+\sqrt{3})} \qquad \textit{Rappel}: \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+cos0}+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)$$

D'où f est continue à gauche de 0

Conclusion : f est continue en 0

4) Soit f une fonction définit par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1 .

On a : $|x-1| = \begin{cases} x-1 \ ; si \ x > 1 \\ -(x-1) \ ; si \ x \leq 1 \end{cases}$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} (x+1) = 2 = f(1)$$

D'où f est continue à droite de 1

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} -(x+1)$$
$$= -2 \neq f(1)$$

D'où f n'est continue à gauche de 1

Conclusion : f est discontinue en 0

Exercice 02

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \frac{sin(\pi x)}{x-1}; \ x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 1

2)Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} \ , \ x \neq 1 \\ f(1) = b \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Solution :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \frac{sin(\pi x)}{x-1}; \ x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 3

Pour que f soit continue en 1 , il faut que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = a$

On pose : $X = x - 1$ donc $x = X + 1$,

d'où : $x \to 1 \Leftrightarrow X \to 0$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{X\to0} \frac{sin(\pi(X+1))}{X}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{sin(\pi X+\pi)}{X} = \lim_{x\to0} \frac{-sin(\pi X)}{\pi X} \times \pi$$
$$= -1 \times \pi = -\pi = a$$

2)Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} \ , \ x \neq 1 \\ f(1) = b \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} = \frac{"3-a"}{0}$$

Si $3 - a \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} = \infty$

Donc $3 - a = 0$,donc $a = 3$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1} (x^2+2x+2) = 5 = f(1) = b$$

Exercice 03

Etudier la continuité de la fonction f sur I dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x - 3$, $I = [0;1]$; **2)** $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + 3$; $I = [0,+\infty[$; **4)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$; $I = \mathbb{R}$

Solution :

1) Montrer que f: $x \to x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x - 3$ est continue sur $[0;1]$

La fonction $f: x \to x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme, en particulier sur $[0;1]$; car $[0;1] \subset \mathbb{R}$

2) Montrons que la fonction $f: x \to 2\sqrt{x} + x^3 + 3$ est continue sur $[0;+\infty[$

- On a la fonction $u : x \to 2\sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$
- Et on a la fonction $v: x \to x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme en particulier sur $[0;+\infty[$;
- Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0;+\infty[$

3)Montrons que la fonction $f: x \to \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur IR

1ère méthode :

f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est IR (car $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2 + 3 \neq 0$)

2ème méthode :

On a la fonction $u: x \to x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

- On a la fonction $v: x \to x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynôme) ; Et on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 3 \neq 0$
- Donc la fonction $f = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

4)Montrons que la fonction $f: x \to \sqrt{x^2 - x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

On a la fonction $u: x \to x^2 - x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

Et on a $(\forall x \in \mathbb{R})$, $x^2 - x + 3 \geq 0$; car le discriminant de $x^2 - x + 3$ est négatif

Donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 04

f une fonction Définie sur $[2;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} & ; -2 \leq x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $]-2;+\infty[$

Solution :

1) Montrer que f est continue en 2.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{3x+2}{x+1}$$
$$= \frac{8}{3}$$
$$= f(2)$$

Donc f est continue à droite de 2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2+5-3^2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-2^2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2^2+5}+3)}$$

$$= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = f(2) \quad ;$$

Donc f est continue à gauche de 2

Conclusion : f est continue en 2

2) La fonction $u: x \to \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur tout intervalle inclus dans $D_u = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$; car c'est une fontion rationnelle

Donc elle est continue sur $]2; +\infty[$

- **La fonction fonction $x \to -3$ est continue sur $[-2; 2[$**

  La fonction fonction $x \to x^2 + 5$ est continue sur $[-2; 2[$

Et $\forall x \in]-2; 2[: x^2 + 5 \geq 0$

Donc La fonction $x \to \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $[-2; 2[$

D'où La fonction $x \to \sqrt{x^2+5} - 3$ est continue sur $[-2; 2[$

- **La fonction fonction $x \to -2$ est continue sur $[-2; 2[$**

  La fonction fonction $x \to x + 2$ est continue sur $[-2; 2[$

  Et $\forall x \in [-2; 2[: x + 2 \geq 0$

  D'où La fonction $x \to \sqrt{x+2} - 2$ est continue sur $[-2; 2[$

- **E on a on a : $\forall x \in [-2; 2[: \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$**

  Donc La fonction $x \to \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ est continue sur $[-2; 2[$

- **D'où la fonction f est continue sur $[-2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$**

  Et d'après la quetion 2) on a f est continue on 2

Donc f est continue sur $[-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\} = [-2; +\infty[$

Exercice 05

Soient f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

1)Déterminer D_f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

2)Déterminer $f(]-\infty, 2[)$, $(]2, +\infty[)$ et $f([3, 4])$

Solution :

Soient f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

1)Déterminer D_f et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$x \in D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Donc $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim \frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad ; car\ x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad ; car\ x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$$

2)Déterminer $f(]-\infty, 2[)$, $(]2, +\infty[)$ et $f([3, 4])$

On a f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ *et* $]2; +\infty[$ car f c'est une fonction rationnelle

Et pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \frac{-6+5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ *et* $]2; +\infty[$

$$f(]2; +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to 2^+} f(x)\right[=]3; +\infty[$$

$$f(]-\infty, 2[) = \left]\lim_{x\to 2^-} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x);\right[=]-\infty; 3[$$

$$f([3, 4]) = [f(4); f(3)] = \left[\frac{7}{2}, 4\right]$$

Exercice 06

1) Montrer que l'équation $\sqrt{x} + x^{2025} - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 + x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que l'équation $x^3 - \frac{1}{x} - 7 = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

Solution :

1) Montrer que l'équation $\sqrt{x} + x^{2025} - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;1[$

On pose pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) = \sqrt{x} + x^{2025} - 1$

On a la fonction $u : x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;1]$

Et on a la fonction $v: x \to x^{2025} - 1$ est continue sur $[0;1]$, car c'est un polynôme

D'où La fonction f est continue sur $[0;1]$ comme somme des fonctions continues,

De plus $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$

Donc $f(0).f(1) < 0$

La fonction f est dérivable sur $]0;1[$

Alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2025x^{2024} > 0$

Alors f strictement croissante sur $[0,1]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

On pose pour tout $x \in [\frac{-\pi}{6}, 0]$: $f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$

On a la fonction $u : x \to \sin(x)$ est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Et on a la fonction $v : x \to x + \frac{1}{2}$ est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Donc La fonction f est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$ comme somme des fonctions continues,

Et on a $f\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ donc $f\left(\frac{-\pi}{6}\right).f(0) < 0$

La fonction f est dérivable sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Alors $f'(x) = cos(x) + 1 \geq 0$ car $-1 \leq cos(x) \leq 1$

Alors f strictement croissante sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 + x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur IR ; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ .Et de plus on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

Alors $f(IR) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

vérifier que $0 < \alpha < 1$

On a f est continue sur $[0;1]$ et strictement croissante sur $]0;1[$.

Et on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ donc $f(1).f(0) < 0$

Donc $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que l'équation $x^3 - \frac{1}{x} - 7 = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} - 7$

- On a la fonction $u : x \to -\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$
- Et on a la fonction $v: x \to x^3 - 7$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme en particulier sur $]0,+\infty[$

Donc f est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme des fonctions continues sur $]0,+\infty[$

- f est dérivable sur $]0,+\infty[$; et $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.Et de plus on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - \frac{1}{x} - 7 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^3 - \frac{1}{x} - 7 = -\infty$

Alors $f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to0^+} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

On a f est continue sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$.

Et on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - \frac{2}{3} - 7 < 0$ et $f(2) = 8 - 7 - \frac{1}{2} > 0$

Donc $f\left(\frac{3}{2}\right).f(2) < 0$ donc $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

Exercice 07

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

1) Étudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]2;4[$.
3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$
4) Etudier le singe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Solution :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

1) Etudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

On dresse le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	-9	↗	$+\infty$

2)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]2;4[$.

On a -5 est une valeur maximale de f sur $]-\infty;2[$

Donc $\forall x \in]-\infty;2[: f(x) \leq -5$

Donc f ne s'annule pas sur $]-\infty;2[$

* La fonction f est continue sur $[2;+\infty[$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

* $f([2;+\infty[) = \left[f(2); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-9;+\infty[$

Donc $0 \in f([2;+\infty[)$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2;+\infty[$

D'où $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Vérifions que $2 < \alpha < 4$

* La fonction f est continue sur $[2;4]$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $[2;4]$

* $g(2) = -9$ et $g(4) = 11$ donc $g(2) \times g(4) < 0$

Donc $2 < \alpha < 4$

3)Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

On a le centre de l'intervalle $[2;4]$ est $c=\frac{4+2}{2}=3$

on a $f(c)=f(3)=-5$; Et on a $f(4)=11$

Donc $f(3)\times f(4)<0$; donc $3<\alpha<4$

Et on a l'amplitude de l'intervalle $[3;4]$ est $l=4-3=1$

On a le centre de l'intervalle $[3;4]$ est $c=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

on a $f(c)=f\left(\frac{7}{2}\right)=124,5$; Et on a $f(3)=-5$

Donc $f(3)\times f\left(\frac{7}{2}\right)<0$, donc $3<\alpha<\frac{7}{2}$

Et on a l'amplitude de l'intervalle $]-1;0[$ est $l=\frac{7}{2}-3=0,5$

4) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$

On a -5 est une valeur maximale de f sur $]-\infty;2[$

Donc $\forall x\in]-\infty;2[: f(x)\leq -5$

Donc $\forall x\in]-\infty;2[: f(x)<0$

Soit $x\in]2;\alpha]$

Donc $x\leq\alpha$ et on a f est strictement croissante sur $]2;\alpha]$

Donc $f(x)\leq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x)=0$ donc $f(\alpha)=0$

D'où $f(x)\leq 0$

Soit $x\in[\alpha,+\infty[$

Donc $x\geq\alpha$ et on a f est strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$

Donc $f(x)\geq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x)=0$ donc $f(\alpha)=0$

D'où $f(x)\geq 0$

Le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-contre

Déterminer le nombre de solution des équations suivantes puis encadrer ces solutions.

x	-4		-3		-1		1
f		↗	3	↘	-1	↗	19

1) $f(x)=18$; 2) $f(x)=0$; 3) $f(x)=-3$; 4) $f(x)=3$

Solution :

1) L'équation $f(x)=18$

Possède 1 solution compris dans l'intervalle $]-1;1[$.

Car $18\in f(]-1;1[)=]-1;19[$

Et f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$

2) L'équation $f(x)=0$

Possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]-4;-3[$, $]-3;-1[$ et $]-1;1[$.

3) L'équation $f(x)=-3$

ne possède pas de solution.

4) L'équation $f(x)=3$

possède 2 solutions : l'une égale à -3, l'autre comprise dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice 09

Soit f une fonction définit sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

1)Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur un intervalle J que l'on déterminera

2)Déterminer la fonction f^{-1}

Solution :

1) la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ (car c'est une polynôme)

- f est dérivable sur $]1; +\infty[$

et on a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = 2x - 2$

- On a $x \in]1; +\infty[$
- Donc $2x > 2$ donc $2x - 2 > 0$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[$: $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Alors la fonction f admet une fonction *réciproque* f^{-1} *définit sur* J

On a : $J = f(I) = f([1; +\infty[) = \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [4; +\infty[$

2) Déterminer la fonction f^{-1} , la fonction réciproque de f

Avec f définit sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Soit $x \in J = [4; +\infty[$ et $y \in I = [1; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$, on a :

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 5 = x$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y = x - 5$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = x - 5 + 1$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 = x - 4$

$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x-4}$ ou $y - 1 = -\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x-4}$ (car $y - 1 > 0$)

$\Leftrightarrow y = \sqrt{x-4} + 1$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1$ pour tout $x \in J = [4; +\infty[$

Exercice 10

Soit f la fonction définit sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2)Soit g la restriction de f sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

a)Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définit sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction *réciproque de* g

c) Résoudre dans $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Solution :

Soit f la fonction définit sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{x\times\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= +\infty$$

Soit $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}\ \ (2\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{4x - 1}{2\sqrt{x}\,(2\sqrt{x} + 1)}$$

On a : $2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)>0$

- $f'(x)=0 \Rightarrow 4x-1=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$

On dresse le tableau de variation de f

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)=0$	↘	$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

2) a) Montrons que g la restriction de f sur $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur J que l'on déterminera ($g(x)=f(x)=x-\sqrt{x}$)

- *la fonction* $x\to x$ est continue $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

la fonction $x\to -\sqrt{x}$ est continue sur sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Donc la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

(car elle est somme de deux Fonction continue sur)

- D'après 1) on a g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Et on a vu que g est continue sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

Alors la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur :

$J=g(I)=g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)$

$=\left[g(\frac{1}{4});\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$

$=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g définit sur $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ par : $g(x)=x-\sqrt{x}$

Soit $x\in J=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$ et $y\in I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ tel que $y=f^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y)=x$

$\Leftrightarrow y-\sqrt{y}=x$

$\Leftrightarrow y-\sqrt{y}=x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y})^2-2\times\frac{1}{2}\sqrt{y}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=x+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-\frac{1}{2})^2=x+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}-\frac{1}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ *ou* $\sqrt{y}-\frac{1}{2}=-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}-\frac{1}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ ($car\sqrt{y}-\frac{1}{2}>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$

Donc $g^{-1}(x)=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$ *pour tout* $x\in J=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$

c) Résoudre dans $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x)=6$

$g(x)=6 \Leftrightarrow x=g^{-1}(6)$

$\Leftrightarrow x=\left(\sqrt{6+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2=9$

Exercice 11

Soit h une fonction définie sur $]-1;\ 1[$ par : $h(x)=\frac{2x}{1-x^2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h

2) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J (à déte...

3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution :

Soit h une fonction définie sur $]-1;\ 1[$ par : $h(x)=\frac{2x}{1-x^2}$

1)Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h

Tableau de signe de $1-x^2$

x	0	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$ 0	$-$

$$\lim_{x\to -1^+} h(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{''-2''}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{''2''}{0^+}=+\infty$$

2)Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J (à déte...

$La\ fonction\ x\to\frac{2x}{1-x^2}$ est continue son domaine de définition qui est : $]-\infty;-1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle

Donc la fonction h est continue sur $]-1;\ 1[$

Soit $x\in]-1;\ 1[$

$$h'(x)=\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'$$
$$=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}$$
$$=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}>0$$

Donc h est strictement croissante sur $]-1;\ 1[$

Alors la fonction g admet une fonction réciproque h^{-1} définit sur : $J=h(I)$

$$=h(]-1;\ 1[)$$
$$=\left[\lim_{x\to -1^+} h(x);\lim_{x\to 1^-} h(x)\right[$$
$$=]-\infty;+\infty[$$

3)Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

Soit $x\in J=\mathbb{R}$ et $y\in I=]-1;\ 1[$ tel que $y=h^{-1}(x)$

$y=h^{-1}(x)\Leftrightarrow h(y)=x$

$$\Leftrightarrow\frac{2y}{1-y^2}=x$$
$$\Leftrightarrow 2y=x(1-y^2)$$
$$\Leftrightarrow xy^2+2y-x=0$$

Si $x=0$ alors $y=0$

Donc $h^{-1}(0)=0$

Si $x\neq 0$

$\Delta=4+4x^2>0$

Donc $y=\frac{-2+\sqrt{4+4x^2}}{2x}$ ou $y=\frac{-2-\sqrt{4+4x^2}}{2x}$

Donc $y_1(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ou $y_2(x)=\frac{-\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$

On a $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$ donc $h^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$$y_1\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\sqrt{1+\frac{16}{9}}-1}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$$

$D'où\ h^{-1}(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ si $x\in\mathbb{R}^*$ et $h^{-1}(0)=0$

Exercice 12

1)a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{4}$

b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$

$(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $\sqrt[3]{x+1} - 2 < 0$; $\sqrt[3]{4-2x} > \sqrt[3]{x+1}$

Solution :

1)a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$

On a : $\sqrt[5]{3} = \sqrt[5\times3]{3^3} = \sqrt[15]{27}$ et $\sqrt[3]{2} = \sqrt[5\times3]{2^5} = \sqrt[15]{32}$

Donc : $\sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{2}$

b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$

$\sqrt{2} = \sqrt[2\times6]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[4\times3]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4\times3]{4^3} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[6]{6} = \sqrt[6\times2]{6^2} = \sqrt[12]{36}$

Donc : $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$

$(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

$(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$

$(E) \Leftrightarrow (x-3)^4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{(x-3)^4} = \sqrt[4]{16}$

$\Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2$ ou $x-3 = -2$

Donc $S = \{5; 1\}$

$(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$;

L'équation (E_2) est définit si $x+2 \geq 0$

Donc le domaine de définition est : $D_{(E_2)} = [-2; +\infty[$

$(E_2) \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^2 - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0$ avec $X = \sqrt[5]{x+2}$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 3$ avec $X = \sqrt[5]{x+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2} = 1$ ou $\sqrt[5]{x+2} = 3$

$\Leftrightarrow x+2 = 1^5$ ou $x+2 = 3^5$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3^5 - 2$

Les deux solutions sont dans $D_{E_2} = [-2; +\infty[$

Donc $S = \{-1; 3^5 - 2\}$

$(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

$x \in D_{(E_3)} \Leftrightarrow 1-2x \geq 0$ et $x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ et $x \geq -1$

Donc le domaine de (E_3) est : $D_{(E_3)} = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$(E_3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[2]{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[6]{(x+1)^3}$

$\Leftrightarrow (1-2x)^2 = (x+1)^3$

$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 7) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Donc $S = \{0\}$

3)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $(x-3)^3 < 7$; $2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$

$(I_1) : (x-3)^3 < 7$

$(I_1) \Leftrightarrow (x-3)^3 < 7$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-3)^3} < \sqrt[3]{7}$

$\Leftrightarrow x-3 < \sqrt[3]{7}$

$\Leftrightarrow x < \sqrt[3]{7} + 3$

Donc $S =]-\infty; \sqrt[3]{7} + 3[$

$(I_2) : \sqrt[3]{x+1} - 2 < 0$

$x \in D_{(I_2)} \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

Donc le domaine de (I_2) est : $D_{(I_2)} = [-1; +\infty[$

$(I_2) \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$

$\Leftrightarrow 2 < \sqrt[3]{x+1}$

$\Leftrightarrow 8 < x + 1$

$\Leftrightarrow 7 < x \Leftrightarrow x \in [7; +\infty[$

$S = [7; +\infty[\cap [-1; +\infty[= [7; +\infty[$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}-8x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$

Solution :

1) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$

$\lim\limits_{x\to 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0$, et $\lim\limits_{x\to 9} x - 9 = 0$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

Rappel ; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{x-1-8}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\left[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2\right]} = \frac{1}{\left[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2\right]}$$

$$= \frac{1}{[4+4+4]} = \frac{1}{12}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{+\infty}{+\infty}$".

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

Car: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}$$

4) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt[3]{x-1}-2 = \sqrt[3]{x-1}-2 = -1$, et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$

Donc: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2} = -\infty$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}-8x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}-8x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{x}{x^3}\right)}-8x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x \times \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-8x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-8\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-8$$

$$= 1-8$$

$$= -7$$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+1}$

$\lim\limits_{x\to 9} \sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+1 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{+\infty}{+\infty}$".

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^3+\left(\sqrt[12]{x}\right)^4+1}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^4+\left(\sqrt[12]{x}\right)^6+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^4\left(1+\frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^3}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^4}+\frac{1}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^4}\right)}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^6\left(1+\frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^4}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^6}+\frac{1}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt[12]{x}}+\frac{1}{\sqrt[12]{x^3}}\right)}{\left(\sqrt[12]{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt[12]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[12]{x^6}}\right)}$$

$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[12]{x}\right)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}} = 0$)

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-x$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{3}$$

Exercice 14

Montrer que $\frac{\sqrt[3]{10^5}\times\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}}=10$ **et** $\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt[4]{4}}}{2\sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Solution :

$$* \frac{\sqrt[3]{10^5}\times\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2}\times\sqrt[3]{2^4}}=\frac{(2\times5)^{\frac{5}{3}}\times(2\times3)^{\frac{2}{3}}}{(3\times5)^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{5}{3}}\times5^{\frac{5}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{4}{3}}}$$

$$=2^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}\times3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}\times5^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}$$

$$=2^{\frac{3}{3}}\times3^{0}\times5^{\frac{3}{3}}$$

$$=2^{1}\times1\times5^{1}$$

$$=10$$

$$* \frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{\sqrt[4]{4}}}{2\sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[8]{2^2}}{2\times(2^3)^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\times\sqrt[12]{2^5}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{8}}}{2\times2^{\frac{3}{6}}\times2^{\frac{5}{12}}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{8}-1-\frac{3}{6}-\frac{5}{12}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}}$$

$$=2^{\frac{4+3-12-6-5}{12}}$$

$$=2^{\frac{-16}{12}}=2^{\frac{-4}{3}}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^3\times2}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

Exercice 15

Soit f une fct définit par : $f(x)=2-\sqrt[3]{x^2-1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) Soit g la restriction de f sur $I=[1;+\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x\in J$

3)a) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α tel que : $1<\alpha<2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de αd'amplitude 0.5

Solution :

Soit f une fct définit par : $f(x)=2-\sqrt[3]{x^2-1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Rappel : $|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a$ ou $x\geq a$ avec $a>0$

$|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$

➢ $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1$

$\Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ou $x\geq 1$

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\sqrt[3]{x^2-1}=-\infty$. car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-1=+\infty$

2) Soit g la restriction de f sur $I=[1;+\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I

Soient $x;y\in[1;+\infty[$ tel que : $x<y$

$x<y\Rightarrow x^2<y^2\Rightarrow x^2-1<y^2-1$

$\Rightarrow\sqrt[3]{x^2-1}<\sqrt[3]{y^2-1}\Rightarrow-\sqrt[3]{x^2-1}>-\sqrt[3]{y^2-1}$

$\Rightarrow 2-\sqrt[3]{x^2-1}>2-\sqrt[3]{y^2-1}\Rightarrow g(x)>g(y)$

D'où g est strictement décroissante sur$[1;+\infty[$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

* La fonction $x: \longmapsto x^2-1$ est continue sur $I=[1;+\infty[$

Et $\forall x \in [1;+\infty[$: $x^2-1 \geq 0$

Donc la fonction $x: \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $I=[1;+\infty[$

- D'où $g: x \longmapsto 2-\sqrt[3]{x^2-1}$ est continue sur $[1;+\infty[$
- La fonction est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J

$$J=f([1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x); f(1)\right]=]-\infty;2]$$

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

c) Soit $x \in]-\infty;2]$ cherchons $y \in [1;+\infty[$ tel que $y=g^{-1}(x)$;

$y=g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y)=x$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt[3]{y^2-1}=x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2-1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y^2-1}\right)^2=(2-x)^3 ;$$

$$\Leftrightarrow y^2-1=(2-x)^3$$

$$\Leftrightarrow y^2=(2-x)^3+1$$

$$\Leftrightarrow |y|=\sqrt{(2-x)^3+1}$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{(2-x)^3+1} \quad ; y \in [1;+\infty[$$

D'où : $g^{-1}(x)=\sqrt{(2-x)^3+1}$; pour tous $x \in]-\infty;2]$

3)a) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α tel que : $1<\alpha<2$

Considérons la fonction h définit par $h(x)=g(x)-x$

La fonction g est continue sur $[1;+\infty[$

Et la fonction $x: \longmapsto -x$ est continue sur $[1;+\infty[$

D'où la fonction h est continue sur $[1;+\infty[$

La fonction g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Et la fonction $x: \longmapsto -x$ est est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

D'où la fonction h est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Car c'est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[1;+\infty[$

$$h(1)=g(1)-1=2-1=1>0$$

$$h(2)=g(2)-2=1-2=-1<0$$

- Donc $h(1)\times h(2)<0$

D'où l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α tel que : $1<\alpha<2$

C-à-dire que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α tel que : $1<\alpha<2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

On a $1<\alpha<2$

Le centre de l'intervalle $]1;2[$ est $c=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

on a $h(c)=h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}$;

Et on a $h(1)=-1$

Donc $h\left(\frac{3}{2}\right)\times h(1)<0$

Donc $1<\alpha<\frac{3}{2}$ et on a l'amplitude $l=\frac{3}{2}-1=0,$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J a déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f(\frac{-1}{4})$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

c) Montrer que $\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

d) En déduire que $\alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0$

Solution :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur I car c'est un polynôme, et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

On a $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$

Donc le signe de $3x^2 - 2x + 3$ est le signe de $a = 3 > 0$

Donc $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tour $x \in \mathbb{R}$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J a déterminer

* La fonction f est f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme)

* La fonction f est f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J et :

$$J = f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

$$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0)$$
$$\Leftrightarrow x = f(0)$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$

* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$* \; g(\mathbb{R}) = g(]-\infty; +\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} g(x); \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Donc $0 \in f(\mathbb{R})$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Vérifions que $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$

* La fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$

$* \; f(0) = 1$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1-2-12+8}{8} = \frac{-7}{8} < 0$

Donc $f(0) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f(\frac{-1}{4})$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{-1-4-48+64}{64} = \frac{10}{64} > 0$$

On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{8} < 0$

Donc $f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$

Donc $-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{4}$

c) Montrer que $\sqrt{\alpha+1}=\frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2+3\alpha+1=0$

$\Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2+4\alpha^2+3\alpha+1=4\alpha^2$

$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=4\alpha^2$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^3=4\alpha^2$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha+1)^2=4\alpha^2$

$\Leftrightarrow \alpha+1=\frac{4\alpha^2}{(\alpha+1)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha+1}=\frac{2|\alpha|}{\alpha+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha+1}=-\frac{2\alpha}{\alpha+1}$ $car\ \alpha<0$

d) En déduire que $\alpha<-\frac{1}{4\sqrt{2}}$

On a $\sqrt{\alpha+1}=\frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

Donc $\alpha+1=\frac{4\alpha^2}{(\alpha+1)^2}$

Donc $(\alpha+1)^3=4\alpha^2$

D'autre part on a $-\frac{1}{2}<\alpha$

Donc $\frac{1}{2}<\alpha+1$

Donc $\frac{1}{8}<(\alpha+1)^3$

Donc $\frac{1}{8}<4\alpha^2$

Donc $\frac{1}{32}<\alpha^2$

Donc $\frac{1}{\sqrt{32}}<|\alpha|$

Donc $\frac{1}{4\sqrt{2}}<-\alpha$ $car\ \alpha<0$

Alors $\alpha<-\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9-x^6+3x^3+1=0$

$x^9-x^6+3x^3+1=0 \Leftrightarrow (x^3)^3-(x^3)^2+3x^3+1=0$

$\Leftrightarrow X^3-X^2+3X+1=0$ $avec\ X=x^3$

$\Leftrightarrow f(X)=0$ $avec\ X=x^3$

$\Leftrightarrow X=\alpha$ $avec\ X=x^3$

$\Leftrightarrow x^3=\alpha$; $\alpha<0$

$\Leftrightarrow (-x)^3=-\alpha$; $\alpha<0$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{-\alpha}$

$\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-\alpha}$

Donc $S=\{-\sqrt[3]{-\alpha}\}$