Professeur : …….. L'année Scolaire :…….. Lycée ……	**Continuité d'une fonction** **Série 01** **2BAC PC2- BIOF**	www.dorosmaroc.com

EXERCICE 01

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} \ ; \ x \neq 2, \\ f(2) = \frac{-1}{3} \quad \text{et } x_0 = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = \frac{5-\sqrt{x+17}}{x-8} \ ; \ x \neq 8, \\ f(8) = \frac{-1}{10} \ \text{et } x_0 = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^3+8} \ \text{Si } x > -2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} \ \text{Si : } -6 \leq x < -2 : \\ f(-2) = \frac{1}{4} \quad \text{et } x_0 = -2 \end{cases}$

EXERCICE 02

1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{cos(\pi x)}{2x-1} = \frac{-\pi}{2}$

2) On considère la fonction g définie par :

$g(x) = mx + 1 \ ; \ x < \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{n \cdot cos(\pi x)}{\pi(2x-1)} \ ; \ x > \frac{1}{2}$

$g(\frac{1}{2}) = -1$

Déterminer les nombres réels m et n pour que la fonction g soit continue au point $x_0 = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 03

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{x^2+ax+1}{x-1}$; x > 1

$f(x) = \frac{3x+b}{2}$; x ≤ 1

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$.

EXERCICE 04

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 + x + \frac{2x}{x-1} + 1$ et I =]−∞ ; 1[

2) $f(x) = (1-3x)\sqrt{x}$ et I = [0 ; +∞[

3) $f(x) = \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x}}$ et I =]0 ; +∞[

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ et I = $\mathbb{R}$.

5) $f(x) = (x-2\sqrt{x})^3$ et I = [0 ; +∞[

EXERCICE 05

Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ et I = [2 ; 3].

2) $f(x) = x + tan(x) - 1$ et $I = [0; \frac{\pi}{4}]$.

3) $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$ et I = [0 ; 1].

EXERCICE 06

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une solution unique dans I.

1) $2x^3 + 3x - 2 = 0$ et I = [0 ; 1]

2) $x^4 + 2x - 3 = 0$ et I = $[\frac{1}{2}; \sqrt{2}]$

3) $-x^3 - 2x - 1 = 0$ et I = $\mathbb{R}$

EXERCICE 07

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = 2x + \sqrt{x} - 1$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Etudier les variations de f sur [0 ; +∞[

3) a- Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique α tel que 0 < α < 1

b- Vérifier que : $\sqrt{\alpha} = 1 - 2\alpha$

4) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x ∈ J.

EXERCICE 08

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1) Déterminer D_f , puis calculer les limites aux bornes de D_f.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer f(]−∞ ; −2]) ; f([−2 ; −1[) ; f(]−1 ; 0]) et f([0 ; +∞[)

4) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle I =]−∞ ; −2].

a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Montrer que : $(\forall x \in J) : g^{-1}(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}$

EXERCICE 09

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = x^3 + 4x - 1$

1) Etudier les variations de la fonction h.

2) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α, puis vérifier que 0 < α < 1.

3) Montrer que : $\sqrt[3]{1-4\alpha} = \alpha$

4) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

EXERCICE 10

Soit f une fonction numérique définie sur I = [2 ; +∞[par :
$f(x) = x - 3 - 2\sqrt{x-1}$

1) a- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que f est continue sur l'intervalle I.

2) a- Vérifier que pour tout x ∈ I :

$f(x) = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 - 3$

b- En déduire que f est strictement croissante sur I.

3) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.

4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x ∈ J.

EXERCICE 11

1) Simplifier les nombres suivants :

$A = \dfrac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt{\sqrt{64}} \times \sqrt[5]{6^5}}{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{\sqrt{256}}}$

$B = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{\sqrt{144}}}$

$C = \dfrac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3} \times \left(\sqrt[5]{3}\right)^6}{\sqrt[5]{3}}$

$D = \dfrac{(343)^{\frac{2}{9}} \times (2401)^{\frac{1}{4}} \times (49)^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{17}{3}}}$

2) Classer dans l'ordre croissant les nombres suivants :

a- $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{5}$ et $\sqrt[4]{3}$

b- $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt[6]{10}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(2x-4)^5 = 32$; $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 1$;

$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\sqrt[3]{x+1} < 2$; $\sqrt[3]{(x-2)(x^2-x+3)} > x-2$

$\sqrt[3]{x^2+8} - 2 < x$; $8x^3 - 125 \geq 0$; $\sqrt[5]{2x-1} \geq 2$

5) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-2}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$; $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt[3]{x+60}-\sqrt{x+12}}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x} - 2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3+x} - 2x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2} - x + 5\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+5x^2+7} - 4x\right)$