

A) Fonction numérique

1) Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments ayant une image par f ; noté D ou D_f .

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

2) Parité d'une fonction

- On dit que f est paire ssi

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f); (x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f); f(-x) = f(x) \end{cases}$$
- On dit que f est impaire ssi

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f); (x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f); f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

3) Fonction minorée-majorée-bornée

- On dit que f est majorée par le réel M sur l'intervalle I ssi $(\forall x \in I); f(x) < M$.
- On dit que f est minorée par le réel m sur l'intervalle I si : $(\forall x \in I); f(x) > m$.
- On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée sur I .
 $\Leftrightarrow (\exists m; M \in \mathbb{R}); (\forall x \in I); m < f(x) < M$

4) Fonction périodique : Soit $(T \in \mathbb{R}^{++})$

On dit que la fonction f est **périodique** de période T ssi

$$\begin{cases} (\forall x \in D); (x \in D \Leftrightarrow x + T \in D) \\ (\forall x \in D); f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

B) Sens des variations d'une fonction

1) Taux de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I , on calcule T le taux de variations $T = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ avec $x \neq y$.

- Si $T > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I ; ($T \geq 0$ alors f est croissante sur I)
- Si $T < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I
- Si $T = 0$ pour tout x et y alors f est constante.

2) Monotonie et la parité d'une fonctions

f une fonction tel que $D_f = I \cup J$ avec I et J sont des intervalles symétrique par rapport à zéro

- Si f est paire sur D_f alors le sens des variations de f sont opposées sur I et J
- Si f est impaire sur D_f alors le sens des variations de f sont les même sur I et J

3) Extrémums d'une fonction numérique :

- On dit que le nombre $f(a)$ est valeur minimale de f sur D_f ssi :
 $(\forall x \in D_f); f(x) \geq f(a)$
- On dit que le nombre $f(a)$ est valeur maximale de f sur D_f ssi :
 $(\forall x \in D_f); f(x) \leq f(a)$

4) Image d'un intervalle par une fonction

f une fonction définie sur un intervalle I
 $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

C) Composée de deux fonctions

f et g définies respectivement sur I et J tel que $f(I) \subset J$; **La composée** des fonctions f et g notée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par $\forall x \in I; g \circ f(x) = g(f(x))$

$$g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$$

- $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$
- $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

Sens des variations de la fonction $g \circ f$

- Si f et g ont le même sens de variations sur I et $f(I)$ respectivement alors $g \circ f$ est croissante sur I
- Si f et g ont du sens de variations contraire sur I et $f(I)$ respectivement alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

D) Positions relatives de deux courbes,

Etudier la position relative de deux courbes de deux fonctions f et g sur D revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors $f(x) \geq g(x)$ alors (C_f) la courbe de f est au dessus de (C_g) la courbe de g sur D
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $f(x) \leq g(x)$ alors (C_f) est en dessous de (C_g)
- Si l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution x_0 alors (C_f) coupe (C_g) au point $A(x_0; f(x_0))$

1) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$. $a \in \mathbb{R}^*$; $D_f = \mathbb{R}$

➤ Le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

Si $a > 0$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

X	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)		$f(-\frac{b}{2a})$	

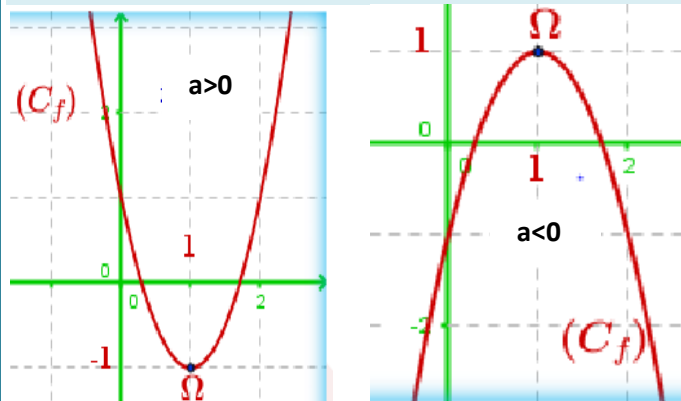
Si $a < 0$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)		$f(-\frac{b}{2a})$	

➤ La nature de la courbe (C_f)

➤ La courbe (C_f) de f est une parabole de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ et d'axe la droite d'équation : $x = \frac{-b}{2a}$



2) Etude et représentation graphique de fonctions $f: x \mapsto ax^3$. $a \in \mathbb{R}^*$; $D_f = \mathbb{R}$

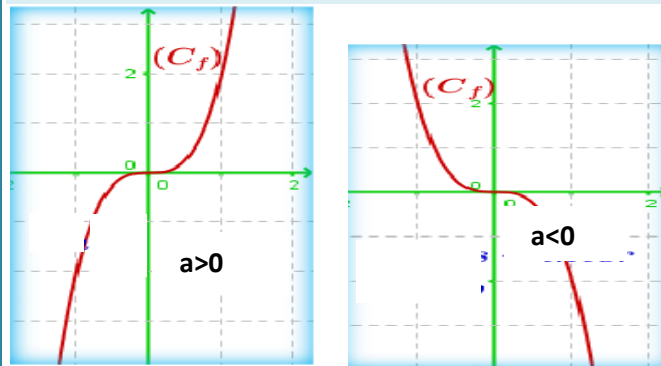
➤ Le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

➤ La courbe (C_f) de la fonction f

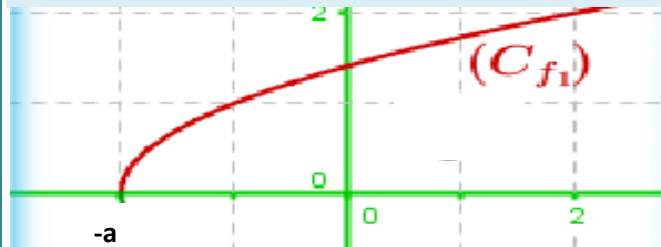
La fonction f est impaire donc la courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'origine de repère O



3) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$ / $a \in \mathbb{R}$.

➤ la fonction f est strictement croissante sur $D_f = [-a; +\infty[$

➤ La courbe (C_f) de f est déduite de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par une translation



4) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $a; b; d \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$

$$D_f =]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]\frac{-d}{c}; +\infty[$$

➤ Le sens des variations de f sur D_f

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si $\Delta > 0$ alors f est strictement croissante sur D_f

X	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)			

Si $\Delta < 0$ alors f est strictement décroissante sur D_f

X	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)			

➤ La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c})$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

