

Chapitre 3 : La projection dans le plan

I - Projection sur une droite parallèlement à une autre droite

Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A , et soit M un point du plan. La droite qui passe par M et est parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M' . Le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur (D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) .

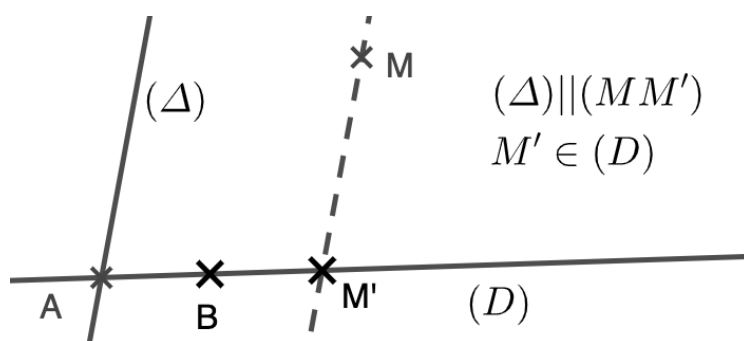
On écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$.

La droite (Δ) s'appelle la direction de la projection.

$P(M)=M'$: M' est l'image du point M par la projection P .

Si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$

On dit alors que le point B est invariant par la projection P .

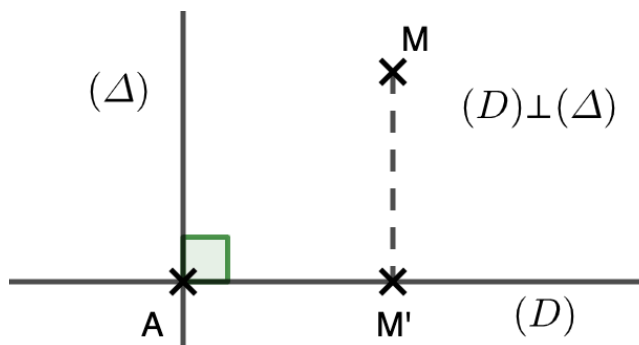


Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection.
- Tout point confondu avec sa projection est un point de (D) .
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ) .

Cas particulier

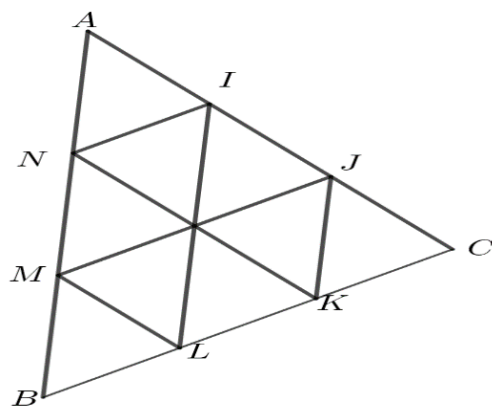
Si les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires (on dit aussi orthogonales), on dit que M' est le **projeté orthogonal** de M sur (D) .



Application :

On considère la figure ci-contre telle que :

$$\begin{cases} (AB) // (IJ) // (JK) \\ (AC) // (NK) // (ML) \\ (BC) // (MJ) // (NI) \end{cases}$$



Remplir le tableau suivant:

<i>Le point</i>	<i>Son projeté</i>	<i>Sur la droite</i>	<i>Parallèlement à la droite</i>
<i>I</i>	...	<i>(BC)</i>	<i>(AB)</i>
<i>J</i>	...	<i>(AB)</i>	<i>(BC)</i>
<i>N</i>	<i>K</i>	...	...
...	<i>N</i>	...	<i>AC</i>

II - La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite :

Soit A et B deux points du plan, et A' et B' sont respectivement leur projection P sur (D) parallèlement à (Δ).

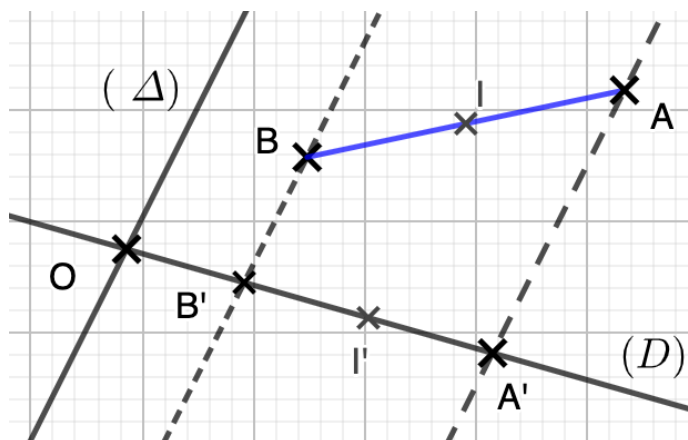
Propriété :

L'image du segment [AB] par la projection P est le segment [A'B'].

On écrit : $P([AB]) = [A'B']$.

Propriété :

Si I est le milieu du segment [AB], alors $P(I) = I'$ est le milieu du segment [A'B']. On dit que la projection conserve les milieux.



III - Théorème de Thalès et le projeté

1 - Théorème de Thalès :

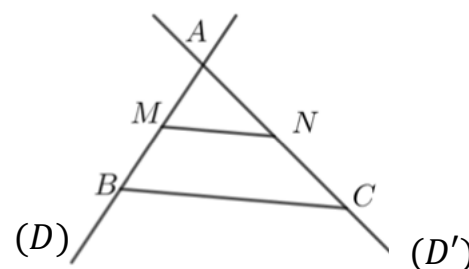
Soient (D) et (D') deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (D) , distincts de A

Soient C et N deux points de la droite (D') , distincts de A

Si (BC) et (MN) sont parallèles,

$$\text{alors : } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



2 - Théorème (réciproque du théorème de Thalès) :

On considère :

- deux droites (d) et (d') sécantes en A,
- deux points B et M de d distincts de A,
- deux points C et N de d' , distincts de A,

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A,B,M et les points A,C,N sont alignés dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

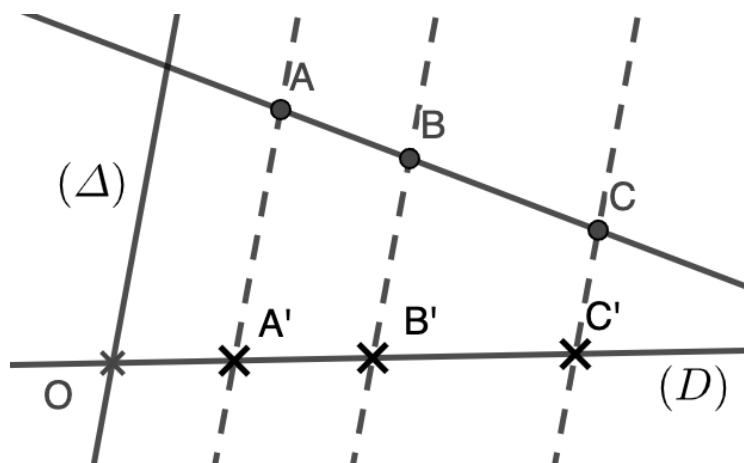
3 - Théorème de Thalès par la projection :

Soient (Δ) et (D) deux droites sécantes en un point O et p la projection sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) .

Si $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$ et $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Alors: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

(On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité).



Théorème réciproque

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en O. A et B deux points distincts du plan tels que, les droites (AB) et (Δ) sont aussi sécantes et p la projection sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) et $p(A)=A'$, $p(B)=B'$ et C un point de (AB) et C' un point de (D) .

Si : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ alors $p(C) = C'$.

Exercices :

Exercice 1

Soit ABC est un triangle et M le milieu de [AB].

1. Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC).
Déterminer : $P_1(A), P_1(C), P_1(B), P_1(M)$.
2. Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC).
Déterminer : $P_2(A), P_2(C), P_2(B), P_2(M)$.

Exercice 2

Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

1. Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC).
2. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

Exercice 3:

Soient ABC est un triangle ,

I et I' deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC).
2. soit M est le milieu de [BC] et la droite (AM) coupe la droite (II') en G.
Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$.