

Chapitre 1 : Continuité d'une fonction

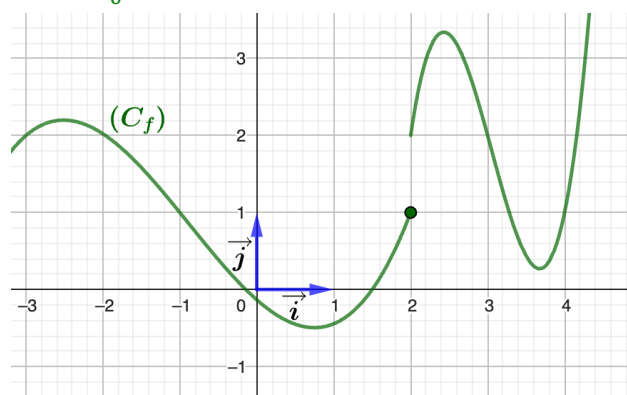
I) Continuité d'une fonction en un point :

1 - Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

Activité :

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f .

- 1) Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on déduire ?
- 2) Déterminer graphiquement $f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$. Que peut dire sur (C_f) au point $x_0 = 2$?

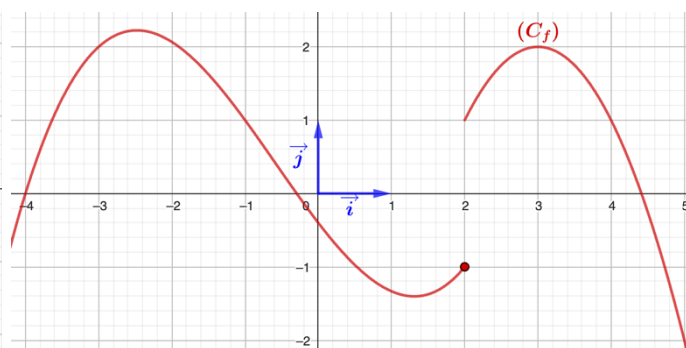
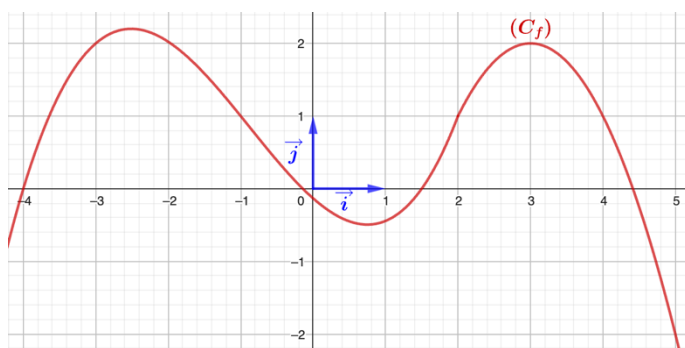


Conclusion :

On dit que f est une fonction continue en a ssi : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Définition :

f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$
 La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



La fonction f est continue en 2

f n'est pas continue en 2

Exemple :

- 1) f une fonction définit par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $a = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en $a = 2$

2) Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $a = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

D'où f est continue en $a = 1$

2) Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

Définition :

- f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; a+r[$; $r > 0$
 f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f une fonction définie sur un intervalle $I =]a-r; a]$; $r > 0$
 f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Propriété : La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche du point a

II) Continuité sur un intervalle :

Définitions

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Propriétés : Exemple des fonctions usuelles continues sur un intervalle

- Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Opérations sur les fonctions continues

a) Somme - produit - quotient :

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur I ssi u et v sont continues sur I

- La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u est continue sur I
 - La fonction $f = (u/v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\frac{u}{v})$ est continue sur I ssi u est continue et v continue sur I et $\forall x \in I; v(x) \neq 0$

Exemples :

- 1) La fonction $f: x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.
- 2) Montrons que la fonction $f: x \mapsto 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$
On a la fonction $u: x \mapsto 2 \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$
Et on a la fonction $v: x \mapsto x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une polynome en particulier sur $[0; +\infty[$;
Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$
- 3) Montrons que la fonction $g: x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

1ère méthode :

g est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 3 \neq 0$)

2ème méthode :

On a la fonction $u: x \mapsto x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

On a la fonction $v: x \mapsto x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynome) ;

et on a $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 + 3 \neq 0$

Donc la fonction $g = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Propriété : La fonction $f = \sqrt{u}$ est continue sur l'intervalle I , ssi la fonction u est continue sur I et $\forall x \in I ; u(x) \geq 0$

Exemple :

Montrons que la fonction $g: x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$

On a la fonction $u: x \mapsto x + 3$ est continue sur $[0; 1[$ car est une fonction polynômiale.

Et on a $\forall x \in [0; 1[, x + 3 \geq 0$;

Donc $g = \sqrt{u}$ est continue sur $[0; 1[$

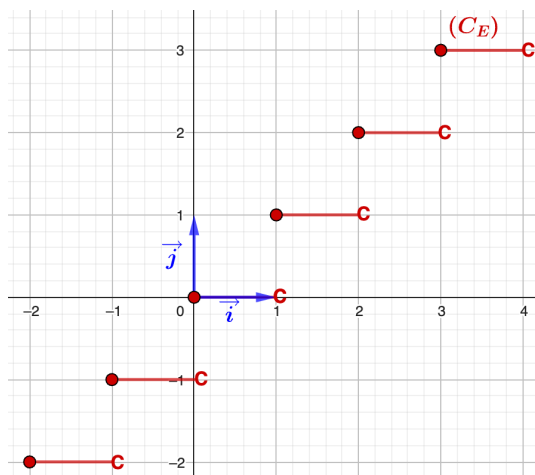
Exemple : Fonction partie entière

- La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.

Exemple :

$E(3,2) = 3$ parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$.

- La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :
- La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $] - 1; 0[$ et à droite en -1 car $\lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.
- La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur



l'intervalle $]1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

III) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire

1) Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème :

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$.
Alors $f([a, b]) = [m, M]$

Propriété :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Image de l'intervalle I par la fonction f		
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Exemple :

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

La fonction f est strictement décroissante sur $] - \infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. On a :

- $f([2; 4]) = [f(2); f(4)]$
 $= [-5; -1]$.
- $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)]$
 $= [-4; 4]$.
- $f([2; +\infty[) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
 $= [-5; +\infty[$.
- $f(]-\infty; 2]) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
 $= [-5; +\infty[$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions.

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I .

Exemple :

On considère la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

On a : $h = g \circ f$ avec $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$ et g est continue sur $] - 1; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$, alors h est continue sur $[0; +\infty[$.

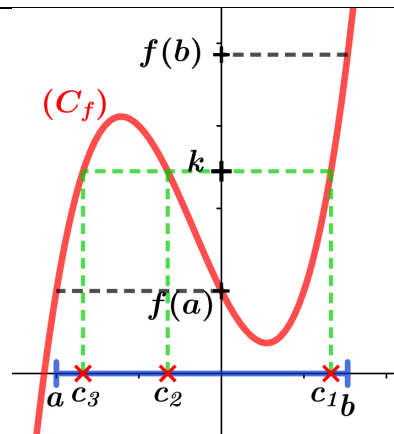
2) Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

a) Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Corollaire :

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$; alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]a, b[$
 si f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors α est unique

Exemple :

Montrons que l'équation (E) : $x^3 + x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α telle que : $-1 < \alpha < 0$.

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et on a $f(-1) \times f(0) < 0$.

Donc d'après T.V.I l'équation (E) admet une solution unique α tel que $-1 < \alpha < 0$.

3) Principe de la méthode de dichotomie

f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$; et soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans cet intervalle.

Pour encadrer α avec une précision donnée.

On calcule le milieu : $m = \frac{a+b}{2}$

- On détermine l'intervalle qui contient α .
- On garde cet intervalle et on le divise en deux.
- On répète la même opération jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Exemple :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ et on a $f(0) \cdot f(1) < 0$ Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que

$0 < \alpha < 1$.

Déterminons un encadrement de α de longueur 0.25

➤ Le centre de $[0, 1]$ est $\frac{1}{2}$ et on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{8}$. Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 1/2 = 1/2$)

Le centre de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est $\frac{3}{4}$ et on a $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-17}{64}$ donc $f(1) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

donc $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 3/4 = 1/4 = 0.25$)

IV- Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définie de $J = f(I)$ vers I telle que : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

Exemple :

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$.

Déterminons l'expression de f^{-1} :

Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x - 2)^2$.

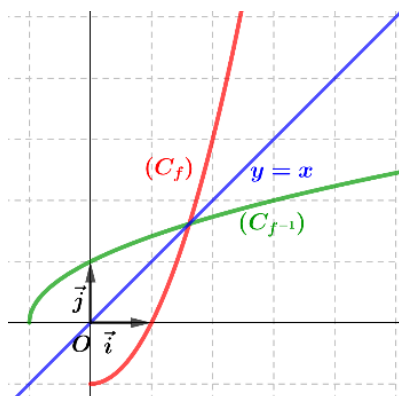
Il en résulte : $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x - 2)^2$.

Propriétés : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :

La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variations que la fonction f .

Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$(\forall x \in I); f^{-1}(f(x)) = x$; $(\forall x \in J); f(f^{-1}(x)) = x$



V - Fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 1$ et Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

- f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $\mathbb{R}^+$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} , appelée **Fonction racine n-ième**, définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

l'image du nombre x de $\mathbb{R}^+$ par f^{-1} est notée $\sqrt[n]{x}$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

Remarques :

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

- $\sqrt[n]{x} = x$.
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x .

Propriétés de la fonction racine n-ième

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exemple :

1) Comparer les nombres: $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$

On a : $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 3]{3^3} = \sqrt[12]{27}$ et $\sqrt[3]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^4} = \sqrt[12]{16}$

Donc : $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$

2) Simplifier le nombre $A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}}$

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}} = \sqrt[3 \times 4]{2^8} = \sqrt[3 \times 4]{2^{2 \times 4}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $x^3 = -8$

$$(E) \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

Donc : $S = \{-2\}$

VI-Puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif :

Définition :

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel tel que : $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$).

Le nombre a^r , appelé puissance rationnelle de base a et d'exposant r , est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$.

Autrement : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Propriété :

Soient a et b deux réels positifs, et n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Exemples : Montrer que $\frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10$ et $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Propriété :

Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.

- Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Exemples :

$\circ \quad 3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$	$\circ \quad 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}$	$\circ \quad \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$	$\circ \quad 2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$
---	--	---	---

Propriété :

Soient a et b deux réels strictement positifs et r et r' deux rationnels.

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$.
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$.
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.
- $(ab)^r = a^r \times b^r$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.