

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2 ; g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} ; h(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

Exercice 2

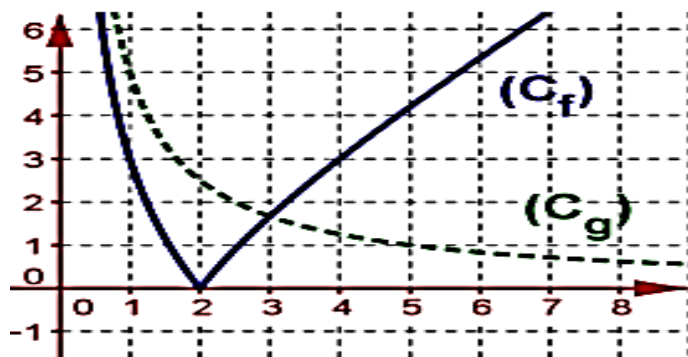
f une fonction dont le tableau de variations

x	-4	-3	1	5
$f(x)$	2		6	
		↘	↗	↘
		-5		-2

- 1) Déterminer D_f
- 2) Déterminer les extremums de f sur D_f
- 3) Déterminer $f([-3; 1])$ et $f([1; 5])$
- 4) Déterminer $f([-4; -3])$ et $f([-4; 5])$

Exercice 3

f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par



- 1) Déterminer $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $g(5)$; $g(1)$
- 2) Dresser la table de variations de f et de g
- 3) Déterminer graphiquement : $f([4; 5])$
 $f([1; 2])$; $f([4; +\infty[)$; $g([1; 5])$; $g([5; +\infty[)$
- 4) Résoudre graphiquement les équations :
 $f(x) = 0$; $f(x) = 3$; $g(x) = f(x)$
- 5) Résoudre graphiquement les inéquations
 $f(x) < 3$; $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$

Exercice 4

f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ et } g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

- 1) a) Dresser la table des variations de f
b) Déterminer la nature de (C_f)
c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
d) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f
- 2) Les mêmes questions pour la fonction g
- 3) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$
- 4) a) Déterminer $D_{g \circ f}$ puis calculer $g \circ f(x)$
b) Déterminer $D_{f \circ g}$ puis calculer $f \circ g(x)$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = \sqrt{x+4} \text{ et } g(x) = 2x^3$$

- 1) a) Déterminer D_f
b) Dresser le tableau des variations de f
c) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f
- 2) Les mêmes questions pour la fonction g
- 3) Déterminer $D_{g \circ f}$ puis calculer $g \circ f(x)$

Exercice 6

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

- 1) Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$
- 3) Étudier la parité de la fonction f
- 4) Montrer que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$
$$f(x) - f(y) = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
, puis en déduire T_f
- 5) Étudier le sens des variations de f sur $[0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$
- 6) En déduire le sens des variations de f sur $[-1; 0]$ puis sur $]-\infty; -1]$
- 7) Dresser la table de variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 7

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \text{ et } g(x) = \frac{x+6}{2x-2}$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f et g
- 2) Vérifier que (C_f) et (C_g) sont sécantes en $A(2; 4)$ puis tracer (C_f) et (C_g)
- 3) Déterminer graphiquement $g([2; +\infty[)$
- 4) Étudier la monotonie de la fonction $f \circ g$ sur $[2; +\infty[$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

- 1) Vérifier que (C_f) et (C_g) sont sécantes en un point $A(2; 1)$.
- 2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)
- 3) Déterminer graphiquement $f([0; 1])$, et $f([1; 2])$
- 4) Soit la fct h définie par : $h(x) = \sqrt{2x - x^2}$
a- Déterminer l'ensemble de définition de h .
b- Vérifier que : $h(x) = g \circ f(x)$; $(\forall x \in D_h)$.
c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

Exercice 9

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = x^2 - x \text{ et } g(x) = \sqrt{x+2}$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f puis g
- 2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)
- 3) Déterminer $g([-2; -\frac{7}{4}])$ et $g([\frac{-7}{4}; +\infty[)$
- 4) Déterminer $D_{f \circ g}$ puis déterminer $f \circ g(x)$
- 5) Montrer que $f \circ g$ est minorée par $-\frac{1}{4}$
- 6) Étudier la monotonie de la fonction $f \circ g$ sur $[-2; -\frac{7}{4}]$ et $[-\frac{7}{4}; +\infty[$

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2 ; f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} ; f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

Rappel 01 :

L'ensemble de définition d'une fonction f noté par D_f est l'ensemble des nombres réels x tel que $f(x) \in \mathbb{R}$

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

Rappel 02 :

- La fonction f est paire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- La fct f est impaire si pour tout $x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Solution

1) $f(x) = x^2 + 2$

➤ L'ensemble de définition de f

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

➤ La parité de la fonction f

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + 2 \\ &= x^2 + 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est paire

Série 02 : Généralités sur les fonctions

$$2) f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

➤ L'ensemble de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 \geq 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \geq 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

➤ La parité de la fonction f

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 + 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est paire

$$3) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

➤ L'ensemble de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$x^2 - 4 \neq 0 \text{ donc } x^2 \neq 4$$

$$\text{donc } x \neq \sqrt{4} \text{ et } x \neq -\sqrt{4}$$

$$\text{donc } x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ La parité de la fonction f

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$\text{donc } x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

$$\text{donc } -x \neq -2 \text{ et } -x \neq 2$$

$$\text{Donc } -x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

$$* f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire

Exercice 2

f une fonction dont le tableau de variations

x	-4	-3	1	5
$f(x)$	2		6	
		↘ -5	↗	↘ -2

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les extremums de f sur D_f

3) Déterminer $f([-3; 1])$ et $f([1; 5])$

4) Déterminer $f([-4; -3])$ et $f([-4; 5])$

Rappel 03 : Extremums d'une fonction

- $f(a)$ est une valeur minimale de f sur D_f si pour tout $x \in D_f$ on a : $f(a) \leq f(x)$
- $f(a)$ est une valeur maximale de f sur D_f si pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) \leq f(a)$

L'image d'un intervalle I : $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

L'image d'un intervalle : $f([a; b]) = [m; M]$

Avec m est la valeur minimale de f sur $[a; b]$

Et M est la valeur maximale de f sur $[a; b]$

Solution

1) $D_f = [-4; 5]$

2) Déterminer les extremums de f sur D_f

La valeur minimale de f sur l'intervalle $[-4; 5]$ est -5

La valeur maximale de f sur l'intervalle $[-4; 5]$ est 6

3) $f([-3; 1]) = [f(-3); f(1)] = [-5; 6]$

$$f([1; 5]) = [f(5); f(1)] = [-2; 6]$$

4) $f([-4; -3]) = [-5; 2]$

$$f([-4; 5]) = [-5; 6]$$

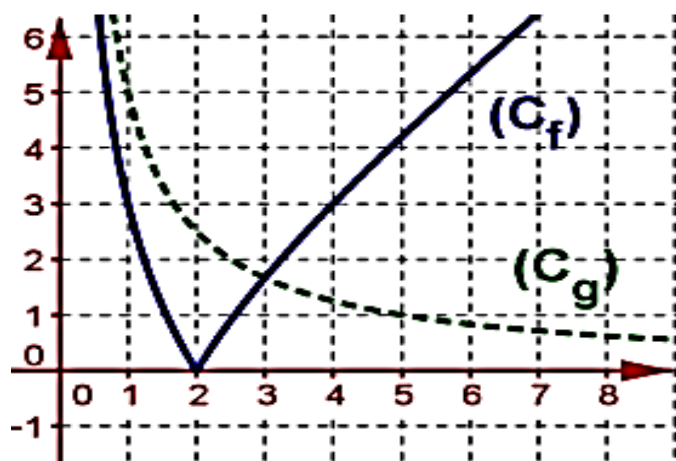
Rappel 4 : La courbe d'une fonction f noté par (C_f) est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ tel que $x \in D_f$

Rappel 5: Sens de variations d'une fonction

- La fonction f est croissante sur I si :
 $\forall (x; y) \in I^2: x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- La fonction f est décroissante sur I si :
 $\forall (x; y) \in I^2: x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- La fonction f est constante sur I si :
 $\forall (x; y) \in I^2: x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
- La fonction est monotone sur I si la fonction est croissante ou décroissante sur I .

Exercice 3

f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par



1) Déterminer $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $g(5)$; $g(1)$
 $f(1) = 3$ et $f(2) = 0$ et $f(4) = 3$
 $g(5) = 1$ et $g(1) = 5$

2) Dresser la table de variations de f

On voit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 2]$
 D'où le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

Série 02 : Généralités sur les fonctions

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$			

Dresser la table de variations de g

On voit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g(x)$		

3) Déterminer graphiquement : $f([4; 5])$

$f([1; 2])$; $f([2; +\infty[)$; $g([1; 5])$; $g([5; +\infty[)$

L'image d'un intervalle I : $f(I) = \{f(x)/x \in I\}$

$f([4; 5]) = [f(4); f(5)] = [3; 4]$

$f([1; 2]) = [f(2); f(1)] = [0; 3]$

$f([4; +\infty[) = [f(4); +\infty[= [3; +\infty[$

$g([1; 5]) = [g(5); g(1)] = [1; 5]$

$g([5; +\infty[) =]0; g(5)] =]0; 1]$

Car quand x s'approche de $+\infty$ on voit que $g(x)$ s'approche de 0

4) Résoudre graphiquement l'équation

$f(x) = 0$; $f(x) = 3$; et $g(x) = f(x)$

Rappel 6 :

- Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation $y = k$
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes (C_f) et C_g

Résolution d'équation $f(x) = 0$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = 0$ en un point unique d'abscisse 2 donc $S = \{2\}$

Résolution d'équation $f(x) = 3$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = 3$ en deux points d'abscisses 1 et 4 donc $S = \{1, 4\}$

Résolution d'équation $g(x) = f(x)$;

On a les courbes (C_f) et C_g sont sécantes en un point unique d'abscisse 3 donc $S = \{3\}$

5) Résoudre graphiquement les inéquations

$f(x) < 3$; $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$

Rappel 07 :

Positions relatives de deux courbes,

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle I alors la courbe (C_f) est située en dessus de (C_g)
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle I alors (C_f) est située en dessous de (C_g) sur I

Résolution d'inéquation $f(x) < 3$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la droite d'équation $y = 3$ sur l'intervalle $]1; 4[$ donc $S =]1; 4[$

Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la courbe (C_g) sur l'intervalle $]0; 3[$
 Donc $S =]0; 3[$

Résolution d'inéquation $f(x) \geq g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessus de la courbe (C_g) sur l'intervalle $[3; +\infty[$
 Donc $S = [3; +\infty[$

Rappel 08 : $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$; $D_f = \mathbb{R}$

a, b et c des nombres réels tels que ($a \neq 0$).

La courbe représentative de la fonction définie par $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthonormé est **une parabole** de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ et la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ son axe de symétrie

Les variations de la fonction

$f: x \mapsto ax^2 + bx + c$.

♣ Si $a > 0$ alors la fonction est croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$

♣ Si $a < 0$ alors la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$

Le tableau de variations de la fonction

$f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Série 02 : Généralités sur les fonctions

Exercice 4

f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ et } g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

- 1) a) Dresser la table des variations de f
 b) Déterminer la nature de (C_f)
 c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 d) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f
- 2) Les mêmes questions pour la fonction g
- 3) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$
- 4) a) Déterminer $D_{g \circ f}$ puis calculer $g \circ f(x)$
 b) Déterminer $D_{f \circ g}$ puis calculer $f \circ g(x)$

Solution

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 ;$$

1) a) On a : $D_f = \mathbb{R}$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2 \text{ et } f(2) = -1$$

Le tableau des variations de f : $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

b) La nature de (C_f) : La courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega(2; -1)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$

Rappel 09 :

- Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses (Ox) sont les points dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$
- L'intersection de (C_f) avec (Oy) l'axe des ordonnées est le point $A(0; f(0))$

c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

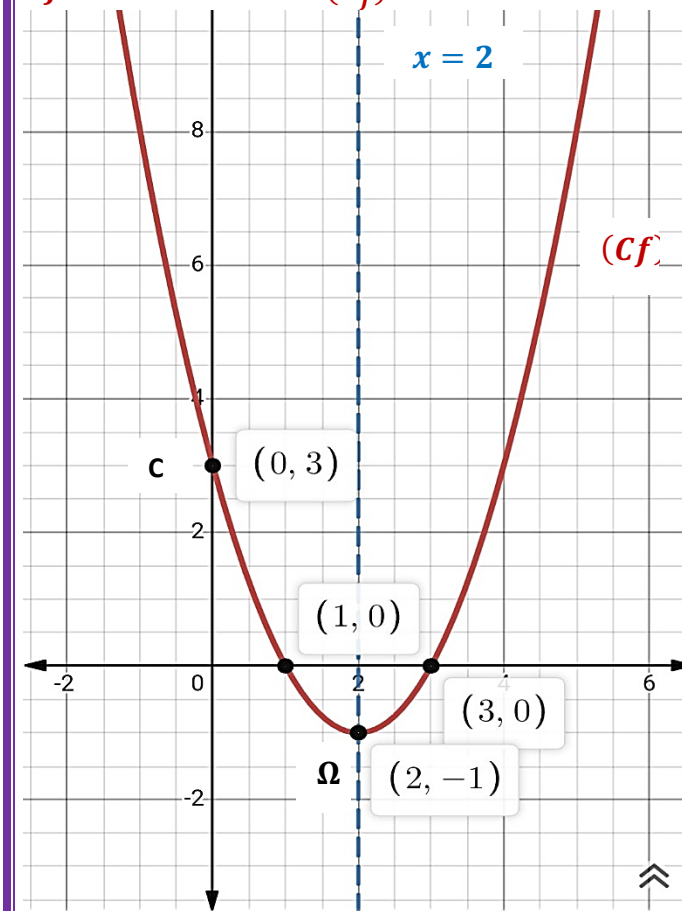
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3 \text{ ou } x = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$$

Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox) sont les deux points $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$
 L'intersection de (C_f) avec (Oy) est le point $C(0; f(0))$ donc $C(0; 3)$

d) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f



Rappel 10 :

Etude de fonction $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $c \in \mathbb{R}^*$

$$D_f =]-\infty; -\frac{d}{c}[\cup]\frac{-d}{c}; +\infty[$$

Le sens des variations de f sur D_f

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si $\Delta > 0$ alors f est str croissante sur D_f

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)			

Si $\Delta < 0$ alors f est str décroissante sur D_f

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)			

La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

2) Les mêmes questions pour la fonction g

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

a) Dresser la table des variations de f sur D_g

a) On a :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\text{On a : } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times 1) = -1$$

Donc $\Delta < 0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur les intervalles

$$]-\infty; -1[\text{ et }]-1; +\infty[$$

D'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g(x)			

b) la nature de la courbe (C_g)

La courbe (C_g) de g est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ c-t-dire $\Omega(-1; 1)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ c-t-dire $x = -1$ et $y = 1$

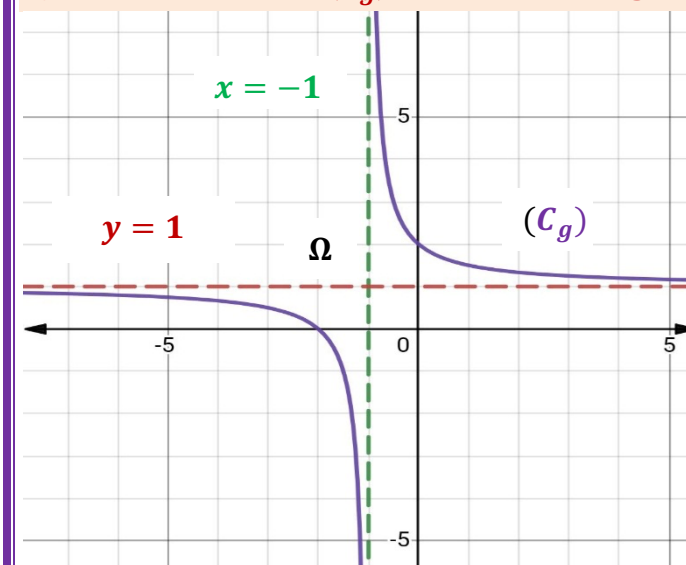
c) Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Le point d'intersection de (C_g) avec l'axe (Ox) est le points $A(-2; 0)$

L'intersection de (C_g) avec (Oy) est le point $B(0; g(0))$ donc $B(0; 2)$

d) Tracer la courbe (C_g) de la fonctions g



Rappel 10 :

Fonction minorée-majorée-bornée

- On dit que f est majorée par le réel M sur l'intervalle I ssi $(\forall x \in I) ; f(x) < M$.

Dans la plupart des cas on simplifie la différence $f(x) - M$ puis on montre que $f(x) - M < 0$ sur I

- On dit que f est minorée par le réel m sur l'intervalle I si : $(\forall x \in I) ; f(x) > m$.

Dans la plupart des cas on simplifie la différence $f(x) - m$ puis on montre que $f(x) - m > 0$ sur I

- On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée sur I.

3) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - (-1) &= x^2 - 4x + 3 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) - (-1) \geq 0, \text{ donc } f(x) \geq -1$$

Rappel 11 :

La composée des fonctions

f et g notée gof est la fonction définie sur I par $\forall x \in I; \text{gof}(x) = g(f(x))$

$$g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$$

• $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$

• $x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$

4)a) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ et } g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } (x^2 - 4x + 3) \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 4x + 3 \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 4x + 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } (x-2)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 2$$

Donc : $D_{gof} = \mathbb{R} - \{2\}$

Calculons : $gof(x)$ sur $D_{gof} = \mathbb{R} - \{2\}$

On a : $gof(x) = g(f(x))$

$$= g(x^2 - 4x + 3)$$

$$= \frac{(x^2 - 4x + 3) + 2}{(x^2 - 4x + 3) + 1}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 4}$$

b) Déterminer D_{fog} puis calculer $fog(x)$

$$x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ et } \frac{x+2}{x+1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x \neq -1$$

Donc : $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-1\}$

Calculons : $fog(x)$ sur $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-1\}$

On a : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$= \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 - 4\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + 3$$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = \sqrt{x+4} \text{ et } g(x) = 2x^3$$

1) a) Déterminer D_f

b) Dresser le tableau des variations de f

c) Tracer la courbe (C_f) de la fonctions f

2) Les mêmes questions pour la fonction g

3) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

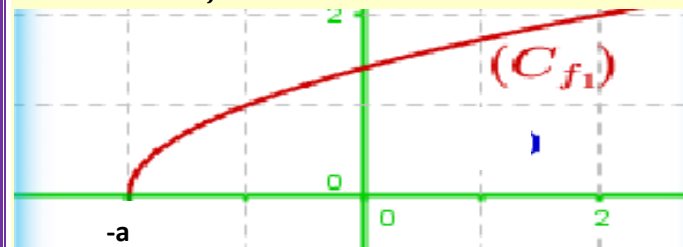
Rappel 12 :

• Etude de fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a} / a \in \mathbb{R}$.

La fonction f est strictement croissante sur

$$D_f = [-a; +\infty[$$

La courbe (C_f) de f



Solution

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

1)a) Déterminer D_f

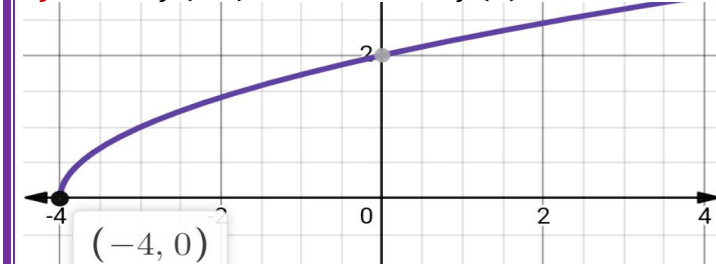
$$x \in D_f \Leftrightarrow x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$$

Donc : $D_f = [-4; +\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f
f est strictement croissante sur $[-4; +\infty[$

x	-4	$+\infty$
f(x)	0	

c) On a : $f(-4) = \sqrt{0} = 0$ et $f(0) = \sqrt{4} = 2$



2) Les mêmes questions pour la : $g(x) = 2x^3$

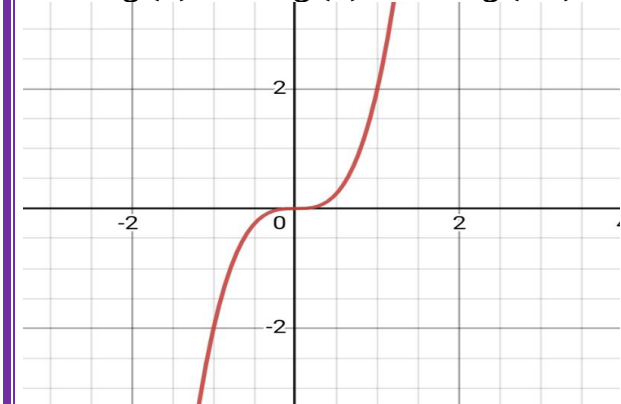
a) Déterminer D_g , on a : $D_g = \mathbb{R}$

b) Le sens des variations de g

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $a = 2 > 0$

c) Tracer la courbe (C_g) de la fonctions f

On a : $g(0) = 0$; $g(1) = 2$ et $g(-1) = -2$



3)a) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3$$

On a : $D_f = [-4; +\infty[$ et $D_g = \mathbb{R}$

$$x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) \in D_g$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; +\infty[\quad \text{et} \quad \sqrt{x+4} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; +\infty[\quad \text{et} \quad x \in [-4; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{gof} = [-4; +\infty[$$

Calculons : $gof(x)$ sur $D_{gof} = [-4; +\infty[$

$$\text{On a : } gof(x) = g(f(x))$$

$$= g(\sqrt{x+4})$$

$$= 2(\sqrt{x+4})^3$$

Exercice 6

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1) Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

3) Etudier la parité du fonction f

4) Montrer que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}, \text{ puis en déduire } T_f$$

5) Etudier le sens des variations de f sur

$$[0; 1] \quad \text{puis sur} \quad [1; +\infty[$$

6) En déduire le sens des variations de f sur

$$[-1; 0] \quad \text{puis sur} \quad]-\infty; -1]$$

7) Dresser la table de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1) Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{2x}{x^2+1} - 1 \\ &= \frac{2x - (x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1} \\ &= \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) - 1 \leq 0$$

$$\text{Donc : } f(x) \leq 1$$

2) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - (-1) &= \frac{2x}{x^2+1} + 1 \\ &= \frac{2x + (x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{2x + x^2 + 1}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 1)}{x^2+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) + 1 \geq 0$$

$$\text{Donc : } f(x) \geq -1$$

3) Etudier la parité du fonction f

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2}{x^2+1} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire

Rappel 12 :

Taux de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I , on calcule T le taux de variations

$$T = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad \text{avec } x \neq y.$$

➤ Si $T > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I

➤ Si $T < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I

la monotonie et la parité d'une fonctions

f une fonction tel que $D_f = I \cup J$ avec I et J

sont des intervalles symétrique par rapport à zéro

➤ Si f est paire sur D_f alors le sens des variations de f sont opposées sur I et J

➤ Si f est impaire sur D_f alors le sens des variations de f sont les même sur I et J

4) Montrer que pour tout x, y dans $\mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}, \text{ puis en déduire } T_f$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2y}{y^2+1} \\ &= \frac{2x(y^2+1) - 2y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{2xy^2 + 2x - 2yx^2 - 2y}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{2xy^2 - 2yx^2 + 2x - 2y}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{-2xy(x-y) + 2(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } f(x) - f(y) = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\text{Donc: } T_f = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)} \cdot \frac{1}{x-y}$$

$$\text{Donc: } T_f = \frac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

5) Etudier le sens des variations de f sur [0; 1] puis sur [1; +∞[

Soient x et y dans l'intervalle [0; 1]

On a : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$

Donc $0 \leq xy \leq 1$

Donc $-1 \leq -xy \leq 0$

Donc $0 \leq 1 - xy \leq 1$

Donc $0 \leq 2(1 - xy) \leq 2$

Et on a : $(x^2 + 1)(y^2 + 1) > 0$

$$\text{Donc: } T_f = \frac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \geq 0$$

Donc la fonction f est croissante sur [0; 1]

Soient x et y dans l'intervalle [1; +∞[

On a : $x \geq 1$ et $y \geq 1$ donc $xy \geq 1$

Donc $-xy \leq -1$

Donc $1 - xy \leq 0$ **Donc** $2(1 - xy) \leq 0$

Et on a : $(x^2 + 1)(y^2 + 1) > 0$

$$\text{Donc: } T_f = \frac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \leq 0$$

Donc f est décroissante sur [1; +∞[

6) En déduire le sens des variations de f sur [-1; 0] puis sur]-∞; -1]

On a la fonction f est croissante sur [0; 1]

De plus f est impaire donc f conserve la monotonie sur [-1; 0]

Série 02 : Généralités sur les fonctions

D'où la fonction f est croissante sur [-1; 0]

On a f est décroissante sur [1; +∞[

De plus f est impaire donc f conserve la monotonie sur]-∞; -1]

D'où f est décroissante sur]-∞; -1]

7) Dresser la table de variations de f sur ℝ

x	-∞	-1	0	1	+∞
f(x)					

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \text{ et } g(x) = \frac{x+6}{2x-2}$$

1) Dresser le tableau de variations de f et g

2) Vérifier que (C_f) et (C_g) sont sécantes en A(2; 4) puis tracer (C_f) et (C_g)

3) Déterminer graphiquement g([2; +∞[).

4) Etudier la monotonie de la fonction f ∘ g sur [2; +∞[

Solution

Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \text{ et } g(x) = \frac{x+6}{2x-2}$$

5) Dresser le tableau de variations de f et g

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est croissante sur ℝ car a = 1/2 > 0

x	-∞	+∞
f(x)		

$$x \in D_g \Leftrightarrow 2x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1 \times -2) - (6 \times 2) = -14$$

Donc g est strictement décroissante sur D_g

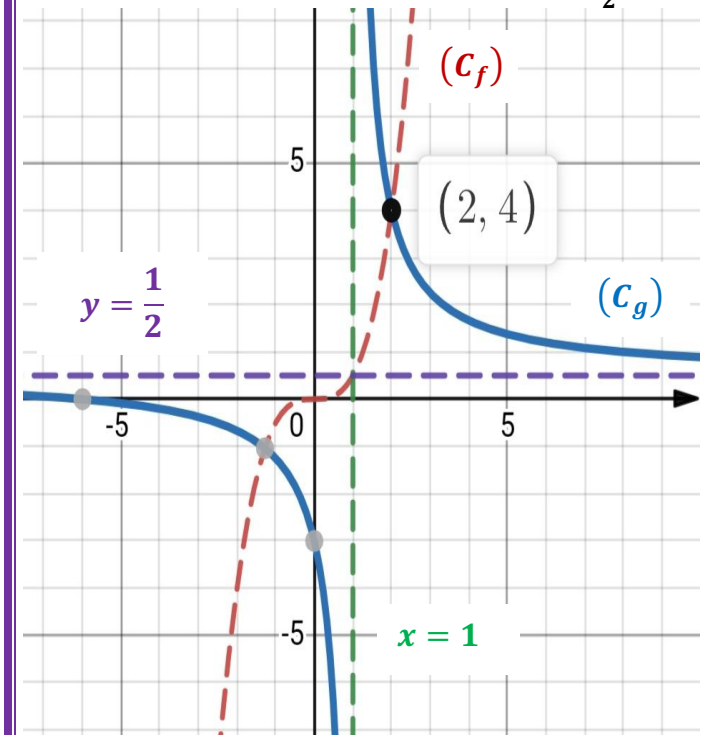
x	-∞	1	+∞
g(x)			

2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)

On a : f(2) = 4 et g(2) = 4

Donc (C_f) et (C_g) sont sécantes en A(2; 4)

De plus La courbe (C_g) est une hyperbole de centre Ω(1; 1/2) et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : x = 1 et y = 1/2



3) Déterminer graphiquement g([2; +∞[).

$$g([2; +\infty[) = \left[\frac{1}{2}, g(2) \right] = \left[\frac{1}{2}, 4 \right]$$

Rappel 13 : Sens des variations de $g \circ f$

- ❖ Si f et g ont le même sens de variations sur I et $f(I)$ respectivement alors $g \circ f$ est croissante sur I
- ❖ Si f et g ont du sens de variations contraire sur I et $f(I)$ respectivement alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

Pratiquement on suit les étapes suivantes :

- On détermine la monotonie de f sur I
- On Détermine $f(I)$
- On détermine la monotonie de g sur $f(I)$
- On déduit la monotonie de $g \circ f$ sur I

4) Etudier la monotonie de la fonction $f \circ g$ sur $[2; +\infty[$

- la fonction g est décroissante sur $[2; +\infty[$
- Et on a : $g([2; +\infty[) = [\frac{1}{2}, 4]$
- Et la fonction f est croissante sur $[\frac{1}{2}, 4]$
- Donc la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

- 1) Vérifier que (C_f) et (C_g) sont sécantes en un point $A(2; 1)$.
 - 2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)
 - 3) Déterminer graphiquement $f([0; 1])$, et $f([1; 2])$
 - 4) Soit la fct h définie par : $h(x) = \sqrt{2x-x^2}$
- a- Déterminer l'ensemble de définition d h
- b- Vérifier que : $h(x) = g \circ f(x)$; $(\forall x \in D_h)$.
- c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

Solution

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

1) Vérifier que (C_f) et (C_g) sont sécantes en un point $A(2; 1)$.

$$\text{On a : } f(2) = 1 \text{ et } g(2) = 1$$

Donc (C_f) et (C_g) sont sécantes en $A(2; 1)$

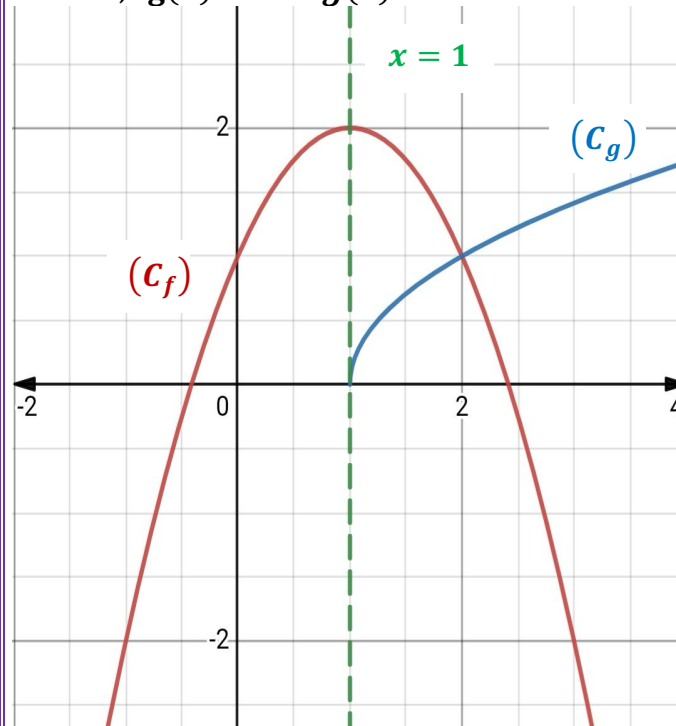
2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)

la courbe (C_f) est une parabole de sommet

$$\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a})) \text{ donc } \Omega(1; 2) \text{ et la droite}$$

d'équation $x = 1$ son axe de symétrie

$$\text{Et on a ; } g(1) = 0 \text{ et } g(2) = 1$$



3) Déterminer graphiquement

$$f([0; 1]), \text{ et } f([1; 2])$$

$$f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [1; 2]$$

$$f([1; 2]) = [f(2); f(1)] = [1; 2]$$

4) Soit la fct h définie par : $h(x) = \sqrt{2x-x^2}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de h

$$x \in D_h \Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 0$$

Etudions le signe de $2x - x^2$

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$2x - x^2$	-	0	+	-

$$\text{Donc : } D_h = [1; 2]$$

b- Vérifier que : $h(x) = g \circ f(x)$; $(\forall x \in D_h)$.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$= g(-x^2 + 2x + 1)$$

$$= \sqrt{-x^2 + 2x + 1 - 1}$$

$$= \sqrt{2x - x^2}$$

$$= h(x)$$

c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times (-1)} = 1 \text{ et } f(1) = 2$$

Le tableau des variations de f : $a = -1 < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		2	

Et on a la fonction g est croissante sur

$$D_g = [1; +\infty[$$

La monotonie de $h = g \circ f$ sur $[0; 1]$

- la fonction f est croissante sur $[0; 1]$
- Et on a : $f([0; 1]) = [1; 2]$
- Et la fonction g est croissante sur $[1; 2]$
- Donc $g \circ f$ est croissante sur $[0; 1]$

La monotonie de $h = gof$ sur $[1; 2]$

- la fonction f est décroissante sur $[1; 2]$
- Et on a : $f([1; 2]) = [1; 2]$
- Et la fonction g est croissante sur $[1; 2]$
- Donc sof est décroissante sur $[1; 2]$

Exercice 9

Soient f et g deux fonction tel que :

$$f(x) = x^2 - x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+2}$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f puis de la fonction g
- 2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)
- 3) Déterminer $g\left(-2; \frac{-7}{4}\right)$ et $g\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right)$
- 4) Déterminer D_{fog} puis déterminer $fog(x)$
- 5) Montrer que fog est minorée par $-\frac{1}{4}$
- 6) Etudier la monotonie de la fonction fog sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$ et $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]$

Solution

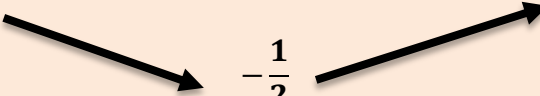
f et g tel que : $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

- 1) Dresser le tableau de variations de f puis de la fonction g

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

Le tableau des variations de f : $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$			

Et on a la fonction g est croissante sur

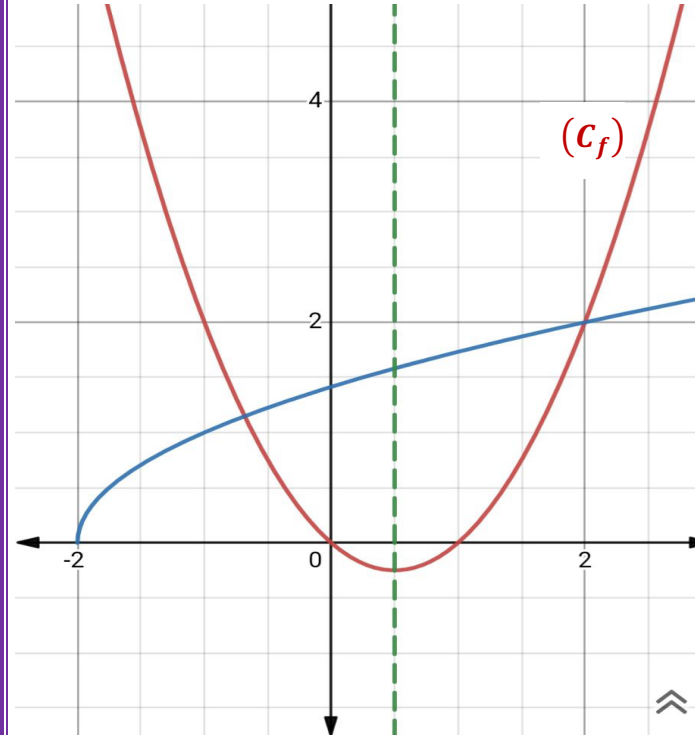
$$D_g = [-2; +\infty[$$

x	-2	$+\infty$
$g(x)$	0	

2) Représenter les courbes (C_f) et (C_g)

la courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ son axe de symétrie de plus $f(2) = 2$

Et on a ; $g(-2) = 0$ et $g(-1) = 1$ et $g(2) = 2$



3) Déterminer $g\left(-2; \frac{-7}{4}\right)$ et $g\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right)$

$$g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right) = \left[g(-2); g\left(\frac{-7}{4}\right)\right] = \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]\right) = \left[g\left(\frac{-7}{4}\right); +\infty\right] = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$$

4) Déterminer D_{fog} puis déterminer $fog(x)$

$$x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\text{ et } \sqrt{x+2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\text{ et } x \in [-2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } D_{fog} = [-2; +\infty[$$

Calculons : $fog(x)$ sur $D_{fog} = x \in [-2; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{On a : } fog(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) \\ &= (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+2}) \end{aligned}$$

5) Montrer que fog est minorée par $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} fog(x) - \left(-\frac{1}{4}\right) &= (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+2}) + \frac{1}{4} \\ &= (\sqrt{x+2})^2 - 2 \times \frac{1}{2} (\sqrt{x+2}) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= (\sqrt{x+2} - \frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } fog(x) - \left(-\frac{1}{4}\right) \geq 0 ; \text{ d'où } fog(x) \geq -\frac{1}{4}$$

6) Etudier la monotonie de fog sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$

- La fonction g est croissante sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$
- Et on a : $g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Et la fonction f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Donc fog est décroissante sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$

Etudier la monotonie fog sur $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]$

- La fonction g est croissante sur $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]$
- $g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$
- Et f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$
- Donc fog est croissante sur $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right]$