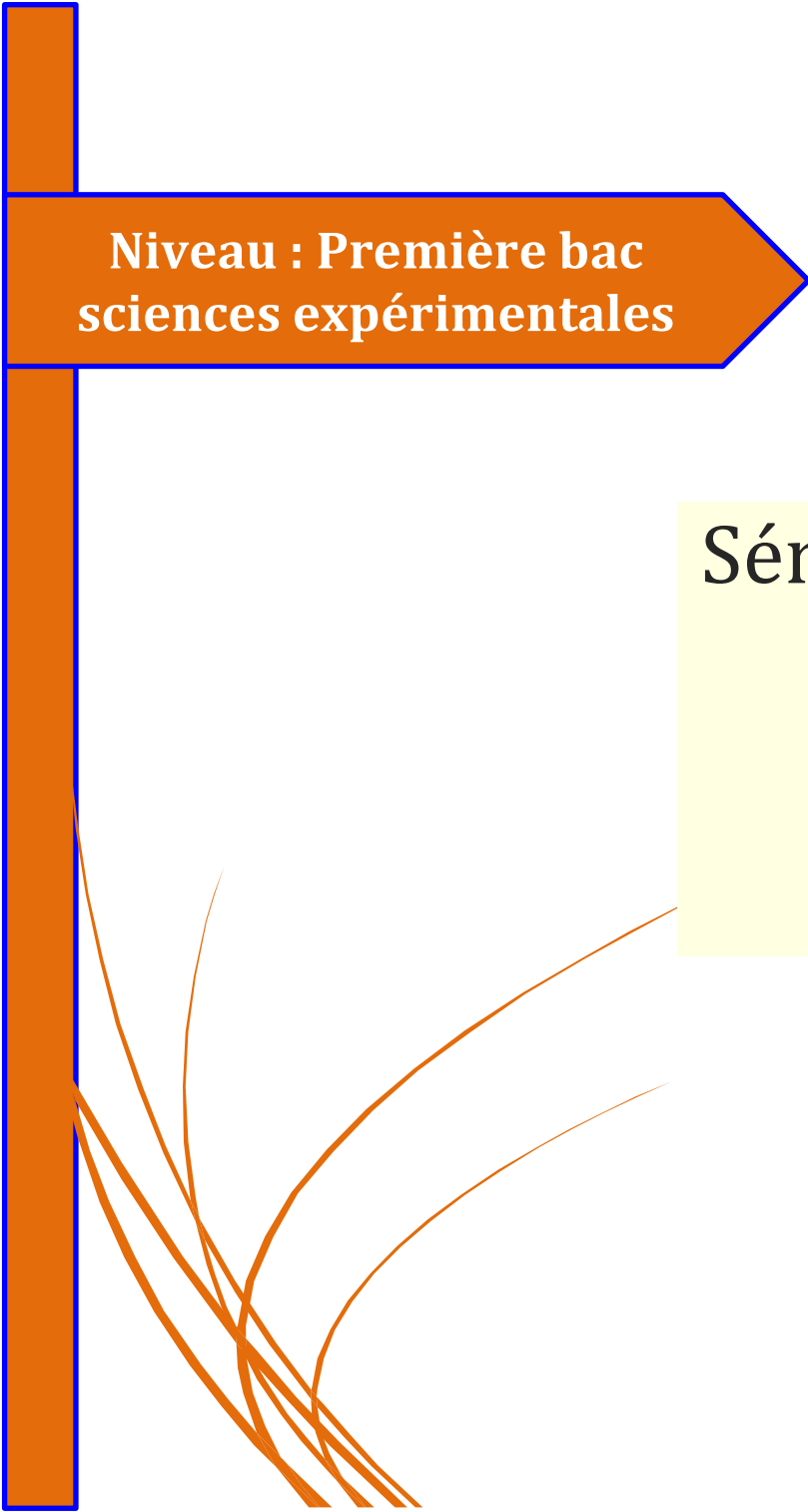




Niveau : Première bac
sciences expérimentales

Série corrigée 1 : Notions de logique

Premier bac sciences expérimentales

www.dorosmaroc.com

Exercice 1

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0 ;$

$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0 ;$

$P_3 : (\forall x \in [1; 6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$

$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0 ;$

Exercice 2 : (Contre-exemple)

1) Montrer que les propositions sont fausses

$P_1 : \ll (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x \gg$

$P_2 : \ll (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x \gg$

2) Donner la négation de la proposition (R).

$(R) : (\forall x \in \mathbb{R}) : [x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$

3) En déduire que la proposition R est fausse.

Exercice 3 : (Contre-exemple)

f une fct définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Donner la négation de la proposition (P)

$(P) : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : "f(a) = f(b) \Rightarrow a = b"$

3) Déduire que (P) est fausse

4) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$; considérons la proposition (P) :

$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4).$

1) Montrer que la proposition (P) est vraie

2) Déterminer l'implication contraposée de P

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Exercice 6 : (Raisonnement déductif ; direct)

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(1 + xy - x - y = 0) \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$

3) Montrer que : Si m et n sont deux entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

Exercice 7 : (Equivalence)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2) Soient x et y deux réels positifs . Montrer que :

$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$

3) Soient a et b deux réels positifs Montrer que : $(a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$

4) x et y deux réels positifs. Montrer que : $(x + y + 13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ et } y = 9)$

Exercice 8 : (Disjonction des cas) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Utiliser les cas $(n = 2k)$ et $(n = 2k + 1)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3

Utiliser les cas $n = 3k$; $n = 3k + 1$; $n = 3k + 2$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Utiliser les deux cas : $(x < 0)$ et $(x \geq 0)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : x^2 - |x - 1| - 1 = 0$

Utiliser les deux cas : $(x < 1)$ et $(x \geq 1)$

$(E_2) : |x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$

Exercice 9 : (Raisonnement par contra-posée)

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :

a) $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

b) $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que

si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

3) Soient $x, y \in]2; +\infty[$, montrer que

$(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Exercice 10 : (Raisonnement par l'absurde)

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3

2) Montrer par récurrence que ;

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) En déduire que $n(n + 1)$ est pair

4) Calculer S_{100}

Exercice 12 : Montrer par récurrence que ;

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5 \gg$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

3) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

4) $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n \geq n$

Exercice 13 :

1) Développer le produit : $(n + 2)(2n + 3)$

2) Montrer par récurrence que ;

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 1

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0 ;$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0 ;$$

$$P_3 : (\forall x \in [1; 6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0 ;$$

Rappel 1 : Quantificateur : $\forall$; $\exists$

➤ Le quantificateur **pour tout** ou **quel que soit** est noté par : $\forall$.

La proposition $(\forall x \in E) ; p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie

➤ Le quantificateur **il existe au moins un** est noté par : $\exists$

la proposition $(\exists x \in E) ; p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

➤ Le quantificateur **il existe un unique** est noté par : $\exists !$

la proposition $\exists ! x \in E ; p(x)$ est vraie lorsqu'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

• $(\forall x \in E) ; p(x)$ est : $(\exists x \in E) ; \overline{p(x)}$

• $(\exists x \in E) ; p(x)$ est : $(\forall x \in E) ; \overline{p(x)}$

Rappel 2 : Signe de : $ax^2 + bx + c$

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$

Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$

$$\text{Sont : } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Série 1 Notions de logique

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a signe de $-a$ signe de a			

Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ une racine dans $\mathbb{R}$

$$\text{est : } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a		signe de a

Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Solution

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0 ;$$

Résoudrons l'équation $3x + 6 = 0$

$$3x + 6 = 0 \quad \text{donc} \quad 3x = -6$$

$$\text{Donc : } x = -\frac{6}{3} ; \text{ donc } x = -2$$

D'où P_1 est vraie

$$\overline{P_1} : (\forall x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 \neq 0 ;$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0 ;$$

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

On pose : $a = 1$; $b = -3$ et $c = 2$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc P_2 est vraie

$$\overline{P_2} : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 \neq 0 ;$$

1 BAC SCIENCE EXP

Page 01

$$P_3 : (\forall x \in [1; 6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

On pose : $a = 1$; $b = -7$ et $c = 6$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$

Tableau de Signe de $x^2 - 7x + 6$

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$	+	0	-	+

Donc P_3 est vraie

$$\overline{P_3} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 7x + 6 > 0 ;$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0 ;$$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 2x + 3 > 0$

On pose : $a = 1$; $b = -2$ et $c = 3$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$$

Donc $\Delta < 0$ d'où l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Donc le Signe de $x^2 - 2x + 3$ est le signe de $a = 1 > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0$

Donc

Donc P_4 est vraie

La négation de P_4

$$\overline{P_4} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 \leq 0 ;$$

Exercice 2 : (Contre-exemple)

1) Montrer que les propositions sont fausses :

$$P_1 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x \rangle$$

$$P_2 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x \rangle$$

2) Donner la négation de la proposition (R).

$$(R) : (\forall x \in \mathbb{R}) : [x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$$

3) En déduire que la proposition R est fausse.

Rappel 3 : Pour montrer que la proposition

$(\forall x \in E); p(x)$ est **fausse**, il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est **vraie**

Solution

1) Montrer que les propositions sont fausses :

$$P_1 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x \rangle$$

Montrons que $\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} \neq x$ est vraie

$$\text{Pour } x = -1 \text{ on a } \sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Donc } 1 \neq -1$$

Donc $\overline{P_1}$ est vraie d'où est P_1 fausse

Remarque : on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = |x|$

$$P_2 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x \rangle$$

Montrons que $\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 < x$ est vraie

$$\text{Pour } x = \frac{1}{2} \text{ on a } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ donc } \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

Donc $\overline{P_2}$ est vraie d'où est P_2 fausse

Remarque : Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'inéquation $x^2 < x$

$$\text{On trouve } S =]0; 1[$$

2) Donner la négation de la proposition (R).

$$(R) : (\forall x \in \mathbb{R}) : [x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$$

Rappel : la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est : $(P \text{ et } \overline{Q})$

$$(\overline{R}) : (\exists x \in \mathbb{R}) : [x^2 = 2x \text{ et } x \neq 0]$$

Série 1 Notions de logique

3) En déduire que la proposition R est fausse.

$$\text{Pour } x = 2 \text{ on a : } x^2 = 2x \text{ et } x \neq 0$$

Donc $\overline{R}$ est vraie d'où est R fausse

Remarque : Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'inéquation $x^2 = 2x$

Exercice 3 : (Contre-exemple)

f fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Donner la négation de la proposition (P)

$$(P) : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : "f(a) = f(b) \Rightarrow a = b"$$

3) Déduire que (P) est fausse

4) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Solution

f fonction définit par $f(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

On pose : $a = 1$; $b = -3$ et $c = 2$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$

admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 1$$

Donc : $S = \{1; 2\}$

2) Donner la négation de la proposition (P)

$$(P) : (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : "f(a) = f(b) \Rightarrow a = b"$$

$$(\overline{P}) : (\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2) : "f(a) = f(b) \text{ et } a \neq b"$$

1 BAC SCIENCE EXP

Page 02

4) Déduire que (P) est fausse

On a d'après la question 1) ;

$f(1) = f(2) = 0$ car 1 et 2 sont des solutions de l'équation $f(x) = 0$ et $1 \neq 2$
Donc $(\overline{P})$ est vraie ; D'où (P) est fausse

5) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ puis en déduire que la fonction f ni paire ni impaire

Rappel 04 :

➤ La fct f est paire si pour tout $x \in D_f$

$$\text{on a : } -x \in D_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

➤ La fct f est impaire si pour tout $x \in D_f$

$$\text{on a : } -x \in D_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

$$\text{On a : } f(1) = 0 \text{ et } f(-1) = 6$$

Donc $f(-1) \neq f(1)$ d'où f n'est pas paire

Et on a : $f(-1) \neq -f(1)$ donc la fonction f n'est pas impaire

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$; considérons la proposition (P) :

$$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4).$$

1) Montrer que la proposition (P) est vraie

2) Déterminer la contraposée de P

Rappel 05 : Pour montrer que la proposition

$P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie

➤ La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Solution

1) Montrer que la proposition (P) est vraie

$$(x^2 = 4x) \Rightarrow (x^2 - 4x = 0)$$

$$\Rightarrow x(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4)$$

2) Déterminer la contraposée de P

$$(x \neq 0 \text{ et } x \neq 4) \Rightarrow (x^2 \neq 4x)$$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : 1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

Rappel 06 :

L'ensemble de définition d'une fonction f noté par D_f est l'ensemble des nombres réels x tel que $f(x) \in \mathbb{R}$

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

Solution

1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \neq 4$

$\Leftrightarrow x \neq \sqrt{4} \text{ et } x \neq -\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x \geq -6$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-2} \Leftrightarrow x \leq 3$

Donc $D_f =]-\infty; 3]$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 0$

La proposition $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2^{ème} méthode : on peut calculer delta qui est négative donc le signe de

$x^2 - 2x + 2$ est le signe de $a = 1 > 0$

Donc $x^2 - 2x + 2$ toujours positive pour tout x dans $\mathbb{R}$; Donc $D_f = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x \geq 0$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 5x = 0$

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 5 = 0$

$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 5)$

Tableau de Signe de : $x^2 - 5x$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
$x^2 - 5x$	$+$	0	$-$	$+$

Donc : $D_f =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

Exercice 6 (Raisonnement déductif ; direct)

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$

3) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

Rappel 07 :

➤ Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est et on montre que Q est vraie

➤ Si : $X^2 = 0$ alors $X = 0$; $X \in \mathbb{R}$

Solution

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$

$\Rightarrow (x - y)^2 = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow x = y$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$1 + x(y-1) - y = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow 1 + x(y-1) - y = 0$

$\Rightarrow x(y-1) - y + 1 = 0$

$\Rightarrow x(y-1) - (y-1) = 0$

$\Rightarrow (y-1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow y-1 = 0 \text{ ou } x-1 = 0$

$\Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$

3) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors m + n est pair

On a : m et n des entiers impairs donc il existe deux entiers naturels k et k' tels que : $m = 2k + 1$ et $n = 2k' + 1$

Donc : $m + n = 2k + 1 + 2k' + 1$

Donc : $m + n = 2k + 2k' + 2$

Donc : $m + n = 2(k + k' + 1)$

Donc m + n est un entier pair

Exercice 7 : (Equivalence)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2) Soient x et y deux réels positifs . Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

3) Soient a et b deux réels positifs Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0 \text{ et } b=0)$

4) a) x et y deux réels positifs. Montrer que : $(x+y+13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) \Leftrightarrow (x=4 \text{ et } y=9)$
b) $\left(\frac{x+y+2}{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \Leftrightarrow (x=y=1)$

Solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+1} - \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x+1) - 3(x^2+1)}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+2-3x^2-3}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0 ; (\text{qui est vrais})$$

$$\text{Donc: } \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

2ème méthode : On a : $x^2+1 > 0$ donc :

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+x+1) \leq 3(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+x+1) - 3(x^2+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+2-3x^2-3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 ; (\text{qui est vrais})$$

$$\text{Donc: } \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

2) Soient x et y deux réels positifs . Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Soient x et y deux réels positifs

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x+y}^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow x+y = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2$$

$$\Leftrightarrow x+y = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

3) Soient a et b deux réels positifs ; Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0 \text{ et } b=0)$

Si $a=0$ et $b=0$ alors $a+b=0$

Montrons que : $a+b=0 \Rightarrow a=0 \text{ et } b=0$

On a : $a+b=0$ et $b \geq 0$

Donc : $a = -b$ et $b \geq 0$ donc $-b \leq 0$

Donc : $a \leq 0$ et on a : $a \geq 0$

Donc $0 \leq a \leq 0$ donc $a = 0$

On a $a+b=0$ et $a=0$ donc $b=0$

Donc $a=0$ et $b=0$

3) x et y deux réels positifs. Montrer que : $x+y+13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} \Leftrightarrow x=4 \text{ et } y=9$

$$x+y+13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2 \times 2\sqrt{x} + 2^2 + \sqrt{y}^2 - 2 \times 3\sqrt{y} + 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{y} - 3)^2 = 0$$

On a : $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{y} - 3)^2 \geq 0$

Donc d'après le résultat précédente on a :

$$(\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \text{ et } (\sqrt{y} - 3)^2 = 0$$

Donc : $\sqrt{x} - 2 = 0$ et $\sqrt{y} - 3 = 0$

Donc : $\sqrt{x} = 2$ et $\sqrt{y} = 3$

Donc : $x = 4$ et $y = 9$

Exercice 8 : (Disjonction des cas) :

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair**
2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Utiliser les cas $n = 3k; n = 3k+1; n = 3k+2$

- 3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2+1} - x > 0$**

Utiliser les deux cas : $(x < 0)$ et $(x \geq 0)$

- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :**

$(E_1): x^2 - |x-1| - 1 = 0$

Utiliser les deux cas : $(x < 1)$ et $(x \geq 1)$

$(E_2) : |x+1| - 3|x-2| + 1 = 0$

Solution

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair**

Cas 1 : n est pair donc $n = 2k ; k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k)^2 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 2k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Cas 2 : n est pair donc $n = 2k+1 ; k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k+1)^2 + 2k+1 + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 2 \\ &= 4k^2 + 6k + 3 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3**

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}$

Les restes de la division euclidienne de n par 3 sont 0 ou bien 1 ou bien 2 ; d'où les cas :

$$n = 3k \text{ ou } n = 3k+1 \text{ ou } n = 3k+2$$

Cas 1 : $n = 3k ; k \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2)$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Cas 2 : $n = 3k+1 ; k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A &= n(n+1)(n+2) \\ &= (3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2) \\ &= (3k+1)(3k+2)(3k+3) \\ &= 3(3k+1)(3k+2)(k+1) \end{aligned}$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Cas 2 : $n = 3k+2 ; k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A &= n(n+1)(n+2) \\ &= (3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2) \\ &= (3k+2)(3k+3)(3k+4) \\ &= 3(3k+2)(k+1)(3k+4) \end{aligned}$$

Donc : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion ; l'entier $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

- 3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2+1} - x > 0$**

Cas 1 : $x \in]-\infty; 0]$; $c - t - dire x \leq 0$

On a $x \leq 0$ donc $-x \geq 0$

Et on a : $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $\sqrt{x^2+1} - x > 0$

Cas 2 : $x \in]0; +\infty[$; $c - t - dire x > 0$

1ère méthode :

$$\begin{aligned} \text{On a : } x^2 + 1 &> x^2 \text{ donc : } \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \\ \text{donc : } \sqrt{x^2+1} &> |x| \end{aligned}$$

Et on a : $x > 0$ donc $|x| = x$

$$\text{donc : } \sqrt{x^2+1} > x$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} > 0 ; \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :**

$(E_1): x^2 - |x-1| - 1 = 0$

Rappel :

$$|x-1| = x-1 \quad \text{si } x \geq 1$$

$$|x-1| = -(x-1) \quad \text{si } x < 1$$

Cas 1 : $x \in [1; +\infty[$; $c - t - dire x \geq 1$

$$\text{Donc } |x-1| = x-1$$

$$\begin{aligned} x^2 - |x-1| - 1 &= 0 \Rightarrow x^2 - (x-1) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - x + 1 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Or : $0 \notin [1; +\infty[$

Donc $S_1 = \{1\}$

Cas 2 : $x \in]-\infty; 1[$; c - t - dire $x < 1$

Donc $|x - 1| = -(x - 1)$

$$x^2 - |x - 1| - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (x - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

On pose : $a = 1$; $b = 1$ et $c = -2$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation $x^2 + x - 2 = 0$

admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -2$$

Or : $1 \notin]-\infty; 1[$

Donc $S_2 = \{-2\}$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \{-2; 1\}$

4) b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$(E_2) : |x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$$

Rappel :

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

On trace le tableau des cas suivants :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$ x + 1 $	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$ x - 2 $	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	$x - 2$

Donc d'après le tableau il y a trois cas :

Cas 1 : $x \in [2; +\infty[$

$$|x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 - 3(x - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 - 3x + 6 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8}{-2}$$

$$\Rightarrow x = 4 \in [2; +\infty[$$

Donc : $S_1 = \{4\}$

Cas 2 : $x \in]-1; 2[$

$$|x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 - 3(-x + 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 + 3x - 6 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \in]-1; 2[$$

Donc : $S_2 = \{1\}$

Cas 3 : $x \in]-\infty; -1[$

$$|x + 1| - 3|x - 2| + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -x - 1 - 3(-x + 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -x - 1 + 3x - 6 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \notin]-\infty; -1[$$

Donc : $S_3 = \emptyset$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{4; 1\}$

Exercice 9

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :

a) $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

b) $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x + 1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que

si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

3) Soient $x; y \in]2; +\infty[$, montrer que
 $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Rappel 08 :

Résonnement par contraposition

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

Pratiquement : on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est vraie

Solution

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que :

a) $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

Soit $y \in \mathbb{R}$: Par contraposée montrons que

$$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$$

$$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow 2y^2 = 8$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4$$

$$\Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$$

D'où : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

b) Montrons : $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+$; par contraposée montrons :

$$(\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2}) \Rightarrow (x = 0)$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2+x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 2+x$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = (2+x)^2$$

$$\Rightarrow 4(x+1) = 4+4x+x^2$$

$$\Rightarrow 4x+4-4-4x-x^2=0$$

$$\Rightarrow -x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

D'où : $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que

si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

Soit : $n \in \mathbb{N}$; par contraposée montrons :

si $(n \text{ est impair})$ alors $(n^2 \text{ est impair})$

On a : $n \text{ est impair}$ donc $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc } n^2 = (2k+1)^2$$

$$\text{Donc : } n^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k + 1$$

$$\text{Donc : } n^2 = 4k^2 + 2 \times 2k + 1$$

$$\text{Donc : } n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Donc : n^2 est impair

D'où : si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

3) Soient $x; y \in]2; +\infty[$, montrer que

$$(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$$

Soient $x; y \in]2; +\infty[$; par contraposée

montrons : $(x^2 - 4x = y^2 - 4y) \Rightarrow x = y$

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - (y-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2+y-2)(x-2-y+2) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y-4)(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x+y-4=0 \text{ ou } x-y=0$$

On a : $x; y \in]2; +\infty[$

Donc $x > 2$ et $y > 2$ donc $x+y > 4$

Donc $x+y-4 > 0$

Donc $x+y-4 \neq 0$

Donc $x-y=0$ donc $x=y$

D'où : $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Exercice 10 : (Raisonnement par L'absurde)

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2+1} < 0$

Rappel 09 :

Résonnement par l'absurde : Pour montrer

que la proposition P est vraie On suppose

que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela

entraîne une proposition fausse

Donc on conclut que P est vraie

Solution

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

On suppose que : $(\exists x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3}$

$$\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(4x+1) = 4(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 12x+3 = 12x-8$$

$$\Leftrightarrow 3 = 8 ; \text{Contradiction}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

On suppose que : $(\exists n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N}$

$$\frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6n+5}{4n+2} = k ; \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 6n+5 = k(4n+2) ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 6n+4+1 = k(4n+2) ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 2(3n+2)+1 = 2k(2n+1) ; k \in \mathbb{N}$$

Or l'entier $2(3n+2)+1$ est impair

et $2k(2n+1)$ pair

Donc contradiction

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2+1} < 0$

On suppose que $(\exists x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2+1} \geq 0$

$$x - \sqrt{x^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x^2+1}^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq x^2+1$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 1$$

Donc contradiction

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2+1} < 0$

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) En déduire que $n(n+1)$ est pair

4) Calculer S_{100}

Rappel 10 : Résonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$ et n_0 un entier donné

Pour montrer que la proposition

" $(\forall n \geq n_0) ; p(n)$ ", est vraie ; on suit les trois étapes suivantes :

➤ **Initialisation :** Pour $n = n_0$, on vérifie que la proposition $p(n_0)$ est vraie

➤ **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$

Supposons que $p(n)$ est vraie et montrons que $p(n+1)$ est vraie

➤ **Conclusion :** d'après le principe de récurrence en conclut que :

$(\forall n \geq n_0) ; p(n)$ est vraie

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

➤ Calculer S_1 ; S_2 et S_3

$$S_1 = 1 ; S_2 = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

➤ Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

➤ Pour $n = 1$ on a : $1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons $1 + 2 + \dots + (n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n) + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) En déduire que $n(n+1)$ est pair

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On a : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Donc : } n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\text{Donc : } n(n+1) = 2k$$

(tel que $k = 1 + 2 + 3 + \dots + n \in \mathbb{N}$)

Donc $n(n+1)$ est pair

4) Calculer S_{100}

$$S_{100} = \frac{100 \times (100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Exercice 12 : Montrer par récurrence que ;

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5 \gg$

$$2) (\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2^3 + 3^2 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4) (\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n \geq n$$

Solution

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5$

➤ Pour $n = 1$ on a : $7^1 - 2^1 = 5$
et 5 est divisible par 5

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $7^n - 2^n$ est divisible par 5

Et montrons que $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

On a $7^n - 2^n$ est divisible par 5

$$\text{Donc : } 7^n - 2^n = 5k ; \text{ tel que } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc : } 7^n = 5k + 2^n ; \text{ tel que } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } 7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7 \times 7^n - 2 \times 2^n \\ &= 7(5k + 2^n) - 2 \times 2^n \\ &= 7 \times 5k + 7 \times 2^n - 2 \times 2^n \\ &= 7 \times 5k + 5 \times 2^n \\ &= 5(7k + 2^n) \end{aligned}$$

Donc $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5$

2) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :$

$$4^0 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$

➤ Pour $n = 0$ on a : $4^0 = 1$ et $\frac{4^{0+1}-1}{3} = 1$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Série 1
Notions de logique

1 BAC SCIENCE EXP

Page 09

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que :

$$4^0 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Montrons que :

$$4^0 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n + 4^{n+1} = \frac{4^{n+2} - 1}{3}$$

$$\begin{aligned} 4^0 + 4 + \dots + 4^n + 4^{n+1} &= \frac{4^{n+1} - 1}{3} + 4^{n+1} \\ &= \frac{4^{n+1} - 1 + (3 \times 4^{n+1})}{3} \\ &= \frac{4 \times 4^{n+1} - 1}{3} \end{aligned}$$

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$1 + 2^3 + 3^3 \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

➤ Pour $n = 1$ on a : $1 = \left[\frac{1 \times (1+1)}{2} \right]^2$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que :

$$1 + 2^3 + 3^3 \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Et montrons :

$$1 + 2^3 + \dots + (n)^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$$

$$\begin{aligned} 1 + 2^3 + \dots + (n)^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que : $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$1 + 2^3 + 3^3 \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

4) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n \geq n$

➤ Pour $n = 0$ on a : $2^0 = 1 \geq 0$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $2^n \geq n$

Et montrons que : $2^{n+1} \geq n+1$

On a : $2^n \geq n$ et on a $2 \geq 1$

Donc $2^n \geq n$ et $2^n \geq 1$

Donc : $2^n + 2^n \geq n + 1$

Donc : $2 \times 2^n \geq n + 1$

Donc : $2^{n+1} \geq n + 1$

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 2^n \geq n$

Exercice 13 :

1) Développer le produit : $(n+1)(2n+1)$

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution

1) Développer le produit : $(n+2)(2n+3)$

$$\begin{aligned} (n+2)(2n+3) &= 2n^2 + 3n + 4n + 6 \\ &= 2n^2 + 7n + 6 \end{aligned}$$

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

➤ Pour $n = 1$ on a : $1 = \frac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

Supposons que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Et montrons :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

➤ D'après le principe de récurrence on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$