

https://www.dorosmaroc.com	Série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et l'arithmétique	Tronc commun science https://www.dorosmaroc.com
Exercice 01 : On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$ 1) Étudier la parité des nombres a et b. 2) En déduire la parité de l'entier c tel que $c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 4)(-1)^a$ 3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .	Exercice 05 1) Vérifier que 337 est premier 2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$ en produit de facteurs premiers. 2) En déduire $pgcd(a; b)$ et $ppcm(a; b)$. 3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$	Exercice 08 Soit n un entier naturel 1) Vérifier que : $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$ 2) Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ 3) Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$
Exercice 02 : 1) Étudier la parité de l'entier : $n^2 + 3n + 4$ 2) Développer et réduire l'expression suivant $(n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$; $n \in \mathbb{N}$ 3) En déduire que $n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n$ est un multiple du 4	Exercice 06 : On pose que $a = 2160$ et $b = 4860$. 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b . 2) En déduire $pgcd(a; b)$ et $ppcm(a; b)$. 3) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers : $a^3 \times b^2$. 4) Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel. 5) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible	Exercice 09 : 1) Soient x et y deux entiers naturels Montrer que $x + y$ et $x - y$ sont de même parité 2) Déterminer les diviseurs de 28 3) Déterminer tous couples $(x; y)$ vérifient : $(E): x^2 - y^2 = 28$ 4) Déterminer tous les couples $(m; n)$ d'entiers naturels tels que : $mn + 3m + 2n = 28$
Exercice 03 : 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ Est multiple de 4. 2) Est-ce qu'il existe un entier naturel n tel que : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$?	Exercice 07: On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$. $a = 7^{n+2} - 7^n$ et $b = 3 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^n$ 1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13 . 2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b . 3) En déduire $pgcd(a; b)$ et $ppcm(a; b)$	Exercice 10 : 1) Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant $(E): x^2 - y^2 = 51$. 2) Déterminer tous les couples $(a; b)$ d'entiers tels que: $a^2 - b^2 = 7344$ et $a \wedge b = 12$
Exercice 04 : 1) Soit n est un entier naturel impair a) Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 b) En déduire que 16 divise $n^4 - 1$. 2) Soient a et b deux entiers naturels impairs Montrer que 16 divise $a^4 + b^4 - 2$		

		Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique	Tronc commun science
	https://www.dorosmaroc.com		PAGE : 01
Exercice 01 : On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$ 1) Étudier la parité des nombres a et b. 2) En déduire la parité de nombre : $c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$ 3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .		On a l'entier b est pair donc : $(-1)^b = 1$ Et a est impair donc $(-1)^a = -1$ Donc on remplace dans c on trouve que : $c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$ $= 6n + 11 - (2n + 3)$ $= 6n + 11 - 2n - 3$ $= 4n + 8$ $= 2(n + 4)$ $= 2p$ avec $p = n + 4$ Donc le nombre c est pair 3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .	
Solution de l'exercice 01 : On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$ 1) Étudier la parité des nombres a et b. $a = 6n + 11$ $= 6n + 10 + 1$ $= 2(3n + 5) + 1$ $= 2k + 1$ avec $k = 3n + 5$ Donc a est un entier impair $b = 2n + 4$ $= 2(n + 2)$ $= 2k'$ avec $k' = n + 2$ Donc b est un entier pair 2) En déduire la parité de nombre : $c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$		$(a + 1)^2 + b^2 = (6n + 11 + 1)^2 + (2n + 4)^2$ $= (6n + 12)^2 + (2n + 4)^2$ $= (6(n + 2))^2 + (2(n + 2))^2$ $= 36(n + 2)^2 + 4(n + 2)^2$ $= 40(n + 2)^2$ $= 40p'$; avec $p' = (n + 2)^2$ Donc le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .	
Exercice 02 : 1) Étudier la parité de l'entier : $n^2 + 3n + 4$ 2) Développer et réduire l'expression suivant $(n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$; $n \in \mathbb{N}$ 3) En déduire que $n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n$ est un multiple du 4		Solution de l'exercice 02 : 1) Étudier la parité de l'entier : $n^2 + 3n + 4$ 1 ^{ère} méthode : $n^2 + 3n + 4 = n^2 + n + 2n + 4$ $= n(n + 1) + 2n + 4$ $= 2k + 2n + 4$ (*) $= 2(k + n + 2)$ $= 2k'$ avec $k' = k + n + 2$ Donc $n^2 + 3n + 4$ est pair (*) $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs	

	Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique	Tronc commun science PAGE : 02
https://www.dorosmaroc.com		
2ème méthode : (Etude des cas) Cas 1 : Si n est pair alors : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ On remplace n dans $n^2 + 3n + 4$ $n^2 + 3n + 4 = (2k)^2 + 3 \times 2k + 4$ $= 4k^2 + 6k + 4$ $= 2(2k^2 + 3k + 2)$ $= 2p, \text{ avec } p = 2k^2 + 3k + 2$ Donc $n^2 + 3n + 4$ est pair Cas 2 : Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$ $n^2 + 3n + 4 = (2k + 1)^2 + 3 \times (2k + 1) + 4$ $= 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 4$ $= 4k^2 + 10k + 8$ $= 2(2k^2 + 5k + 4)$ $= 2p, \text{ avec } p = 2k^2 + 5k + 4$ Donc $n^2 + 3n + 4$ est pair 2) Développer et réduire l'expression suivant : $(n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$; $n \in \mathbb{N}$ $(n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$ $= n^4 + 3n^3 + 4n^2 + n^3 + 3n^2 + 4n$ $= n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n$	3) En déduire que $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple de 4 On a d'après la question 1) $n^2 - 3n + 4 = 2k \text{ et } n^2 - 3n + 4 = 2p$ Donc : $n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n = (n^2 + n)(n^2 + 3n + 4)$ $= n(n + 1)(n^2 + 3n + 4)$ $= 2k \times 2p$ $= 4kp$ Donc l'entier $n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 4n$ est un multiple de 4 Exercice 03 : 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ est multiple de 4. 2) Est-ce qu'il existe un entier naturel n tel que : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$? Solution de l'exercice 03 : 1) On a le nombre $n(n + 1)$ est produit de deux nombre consécutifs donc il est pair donc $n(n + 1) = 2k$, avec k un entier	Et on a le nombre $(n + 2)(n + 3)$ est produit de deux nombre consécutifs donc il est pair donc $(n + 2)(n + 3) = 2p, \text{ avec } p \text{ un entier}$ Donc $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2k \times 2p$ $= 4kp$ D'où le nombre $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ est multiple de 4. 2) Est qu'il existe un entier naturel n tel que : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$? 2010 n'est pas un multiple de 4 Donc il n'existe pas un entier naturel n tel que : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2010$ Exercice 04 : 1) Soit n est un entier naturel impair a) Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 . b) En déduire que 16 divise $n^4 - 1$. 2) Soient a et b deux entiers naturels impairs ,montrer que 16 divise $a^4 + b^4 - 2$ Solution de l'exercice 04 : 1)a) On a n un entier naturel impair Donc $n = 2k + 1$ avec k un entier : $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1$ $= (2k)^2 + 2 \times 2k + 1 - 1$ $= 4k^2 + 4k$ $= 4k(k + 1)$ ($k(k + 1)$ est produite de deux consécutifs)

Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

Don : $n^2 - 1 = 4 \times 2k'$, avec k' un entier
 $= 8k'$, avec k' un entier

b) En déduire que 16 divise $n^4 - 1$

On a :

$$\begin{aligned} n^4 - 1 &= (n^2)^2 - 1^2 \\ &= (n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= 8k' [(2k + 1)^2 + 1] \\ &= 8k' [(2k)^2 + 2 \times 2k + 1 + 1] \\ &= 8k' [4k^2 + 4k + 1 + 1] \\ &= 8k' [4k^2 + 4k + 2] \\ &= 8k' \times 2[2k^2 + 2k + 1] \\ &= 16k' [2k^2 + 2k + 1] \\ &= 16p \text{ avec } p = k'[2k^2 + 2k + 1] \end{aligned}$$

Donc 16 divise $n^4 - 1$

2) Soient a et b deux entiers naturels
 impairs, montrer que 16 divise $a^4 + b^4 - 2$
 $a^4 + b^4 - 2 = a^4 - 1 + b^4 - 1$

On a d'après la question précédente 16
 divise $a^4 - 1$ donc $a^4 - 1 = 16p$

Et 16 divise $b^4 - 1$ donc $b^4 - 1 = 16p'$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 - 2 &= a^4 - 1 + b^4 - 1 \\ &= 16p + 16p' \\ &= 16(p + p') \end{aligned}$$

Donc 16 divise $a^4 + b^4 - 2$

Exercice 05 :

- 1) Vérifier que 337 est premier
- 2) Décomposer les nombres
 $a = 240$ et $b = 2022$ en produit de
 facteurs premiers.
- 2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.
- 3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

Solution de l'exercice 06 :

- 1) Vérifier que 337 est premier
 $\sqrt{337} = 18,35 \dots$
 Les nombres premiers inférieurs ou égaux
 à 18 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17
 On a 2, 3, 5 ne divise pas 337
 Avec calculatrice en teste la divisibilité de
 337 par 7 ; 11 ; 13 ; 17
 On trouve 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divise pas 337
 Donc 337 est premier
- 2) Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$

240	2	;	2022	2
120	2	;	1011	3
60	2	;	337	337
30	2	;	1	
15	3	;		
5	5	;		
1		;		

Donc : $a = 2^4 \times 3 \times 5$ et $b = 2 \times 3 \times 337$

2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.

$$a = 2^4 \times 3 \times 5 \text{ et } b = 2 \times 3 \times 337$$

$$\text{pgcd}(a; b) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{ppcm}(a; b) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 337$$

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

$$\begin{aligned} \sqrt{240 \times 2022} &= \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 337} \\ &= \sqrt{(2^2)^2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 337} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 2 \times 337} \\ &= 6\sqrt{3370} \end{aligned}$$

Exercice 06 :

On pose que $a = 2160$ et $b = 4860$.

- 1) Décomposer en produit de facteurs
 premiers les deux nombres a et b .
- 2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.
- 3) Déterminer la décomposition en produit
 de facteurs premiers : $a^3 \times b^2$.
- 4) Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier
 naturel.
- 5) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de
 fraction irréductible.

Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

Solution de l'exercice 06 :

1) Décomposer $a = 2160$ et $b = 4860$.

2160	2	;	4860	2
1080	2	;	2430	2
540	2	;	1215	3
270	2	;	405	3
135	3	;	135	3
45	3	;	45	3
15	3	;	15	3
5	5	;	5	3
1		;	1	5

Donc : $a = 2^4 \times 3^3 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^5 \times 5$

2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.

$$a = 2^4 \times 3^3 \times 5 \quad \text{et} \quad b = 2^2 \times 3^5 \times 5$$

$$\text{pgcd}(a; b) = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$$\text{ppcm}(a; b) = 2^4 \times 3^5 \times 5$$

3) la décomposition de $a^3 \times b^2$

$$\begin{aligned} a^3 \times b^2 &= (2^4 \times 3^3 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3^5 \times 5)^2 \\ &= 2^{12} \times 3^9 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^{10} \times 5^2 \\ &= 2^{16} \times 3^{19} \times 5^5 \end{aligned}$$

4) Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier

$$\begin{aligned} \sqrt{a \times b} &= \sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 2^2 \times 3^5 \times 5} \\ &= \sqrt{2^6 \times 3^8 \times 5^2} \\ &= \sqrt{(2^3)^2 \times (3^4)^2 \times 5^2} \\ &= 2^3 \times 3^4 \times 5 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel

5) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{2^4 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^5 \times 5} \\ &= \frac{2^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5} \\ &= \frac{2^2}{3^2} \end{aligned}$$

Exercice 07:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a = 7^{n+2} - 7^n \quad \text{et} \quad b = 3 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^n$$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13.

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b .

3) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$

Solution de l'exercice 07 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a = 7^{n+2} - 7^n \quad \text{et} \quad b = 3 \cdot 7^{n+1} + 5 \cdot 7^n$$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13.

$$\begin{aligned} a &= 7^{n+2} - 7^n \\ &= 7^n \times 7^2 - 7^n \\ &= 7^n(7^2 - 1) \\ &= 7^n \times 48 \\ &= 7^n \times 3 \times 16 \end{aligned}$$

Donc est multiple de 3

$$\begin{aligned} b &= (3 \times 7^{n+1}) + (5 \times 7^n) \\ &= (3 \times 7^n \times 7) + (5 \times 7^n) \\ &= 7^n(3 \times 7 + 5) \\ &= 7^n \times 26 \\ &= 7^n \times 13 \times 2 \end{aligned}$$

Donc b multiple de 13.

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b .

On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned} a &= 7^n \times 3 \times 16 \\ &= 7^n \times 3 \times 2^4 \end{aligned}$$

les nombres 7 ; 3 et 2 sont premiers

$$b = 7^n \times 13 \times 2$$

les nombres 7 ; 13 et 2 sont premiers

D'où $a = 7^n \times 3 \times 2^4$ et $b = 7^n \times 13 \times 2$

3) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$

$$\text{pgcd}(a; b) = 7^n \times 2$$

$$\text{ppcm}(a; b) = 7^n \times 2^4 \times 13 \times 3$$

Exercice 08:

Soit n un entier naturel

1) Vérifier que : $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

2) Déterminer les valeurs de l'entier

naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier

naturels n pour lesquelles : $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$

Solution de l'exercice 08 :

Soit n un entier naturel

1) Vérifier que : $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

1^{ère} méthode :

$$1 + \frac{6}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1} = \frac{n+7}{n+1}$$

2^{ème} méthode :

$$\frac{n+7}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{6}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$$

2) Déterminer les valeurs de l'entier

naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N} \quad \text{c-à-dire} \quad 1 + \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$\text{c-à-dire} \quad \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N}$$

c-à-dire 6 est divisible par $n+1$

Et on a les diviseurs de 6 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6

Donc $n+1 = 1$; c-à-dire $n = 0$

Ou bien: $n+1 = 2$; c-à-dire $n = 1$

Ou bien: $n+1 = 3$; c-à-dire $n = 2$

Ou bien: $n+1 = 6$; c-à-dire $n = 5$

Donc les valeurs de l'entier naturels n

pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ sont : 0 ; 1 ; 2 ; 5

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{3n+28}{n+4} &= \frac{3n+12+16}{n+4} \\ &= \frac{3(n+4)+16}{n+4} \\ &= \frac{3(n+4)}{n+4} + \frac{16}{n+4} \\ &= 3 + \frac{16}{n+4} \end{aligned}$$

$$\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N} \quad \text{c-à-dire} \quad 3 + \frac{16}{n+4} \in \mathbb{N}$$

$$\text{c-à-dire} \quad \frac{16}{n+4} \in \mathbb{N}$$

c-à-dire 16 est divisible par $n+4$

Et on a les diviseurs de 16 sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

Donc $n+4 = 1$ donc $n = -3 \notin \mathbb{N}$

Ou bien: $n+4 = 2$ donc $n = -2 \notin \mathbb{N}$

Ou bien: $n+4 = 8$; c-à-dire $n = 4$

Ou bien: $n+4 = 16$; c-à-dire $n = 12$

Donc les valeurs de l'entier naturels n pour

lesquelles $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$ sont : 4 et 12

Exercice 09 :

1) Montrer que $x+y$ et $x-y$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

3) Déterminer tous les entiers naturels

x et y qui vérifient : $x^2 - y^2 = 28$ (E)

4) Déterminer tous les couples $(m;n)$

d'entiers naturels tels que :

$$mn + 3m + 2n = 18$$

Solution de l'exercice 09 :

1) montrer que $x+y$ et $x-y$ sont de même parité

$$\text{On a : } x+y + x-y = 2x$$

Donc la somme de $x+y$ et $x-y$ est un entier pair

Donc $x+y$ et $x-y$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

Sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28

3) Déterminer tous les entiers naturels

x et y qui vérifient : $x^2 - y^2 = 28$: (E)

$x^2 - y^2 = 28$ donc $(x-y)(x+y) = 28$

On a $x+y$ et $x-y$ sont de même parité

Donc il reste un seul possibilité :

$$28 = 2 \times 14$$

Et on a $x-y \leq x+y$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x-y = 2 \\ x+y = 14 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2x = 16 & ; (L_1 + L_2) \\ x+y = 14 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 8 \\ x+y = 14 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 8 \\ 8+y = 14 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

Donc le couple $(x; y)$ qui vérifient : (E) est (8 ; 6)

4) Déterminer tous les couples (m ; n) d'entiers naturels tels que :

$$mn + 3m + 2n = 28$$

$$\text{Donc : } m(n + 3) + 2n + 6 = 28 + 6$$

$$\text{Donc : } m(n + 3) + 2(n + 3) = 34$$

$$\text{Donc : } (n + 3)(m + 2) = 34$$

Les diviseurs de 34 sont 1 ; 2 ; 17 ; et 34

$$\text{Donc : } \begin{cases} n + 3 = 1 \\ m + 2 = 34 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} n + 3 = 34 \\ m + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou bien } \begin{cases} n + 3 = 2 \\ m + 2 = 17 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} n + 3 = 17 \\ m + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} n = -2 \notin \mathbb{N} \\ m = 32 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n = 31 \\ m = -11 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} n = -1 \notin \mathbb{N} \\ m = 15 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n + 3 = 14 \\ m + 2 = 0 \end{cases}$$

Donc le couple (m ; n) d'entiers naturels tels que : $mn + 3m + 2n = 28$ est (0 ; 14)

Exercice 10 :

1) Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant $x^2 - y^2 = 51$.

2) Déterminer tous les couples (a ; b) d'entiers tels que:

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

Solution de l'exercice 10 :

1) Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant (E): $x^2 - y^2 = 51$

$$51 = 17 \times 3 \quad \text{ou} \quad 51 = 3 \times 17$$

$$\text{ou } 51 = 1 \times 51 \quad \text{ou} \quad 51 = 51 \times 1$$

On a $x + y$ et $x - y$ sont de même parité

Et on a $x - y \leq x + y$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2x = 20 & ; (L_1 + L_2) \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 10 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 10 \\ 10 + y = 17 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ou bien } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 51 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} 2x = 52 & ; (L_1 + L_2) \\ x + y = 51 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 26 \\ x + y = 51 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 26 \\ 26 + y = 51 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 26 \\ y = 25 \end{cases}$$

Donc les couples (x ; y) qui vérifient : (E)

sont (10 ; 7) et (26 ; 25)

2) Déterminer tous les couples (a ; b) d'entiers tels que:

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

On a : $a \wedge b = 12$

Donc 12 divise a et 12 divise b

Donc $a = 12k$ avec k un entier

et $b = 12p$ avec p un entier

On remplace dans $a^2 - b^2 = 7344$ on trouve : $(12k)^2 - (12p)^2 = 7344$

$$\text{Donc } 144k^2 - 144p^2 = 7344$$

$$\text{Donc } 144(k^2 - p^2) = 7344$$

$$\text{Donc } k^2 - p^2 = \frac{7344}{144}$$

$$\text{Donc } k^2 - p^2 = 51$$

Et on a d'après 1) les couples (k ; p) qui vérifient $k^2 - p^2 = 51$

sont (10 ; 7) et (26 ; 25)

$$\text{Pour } k = 10 \text{ on a } a = 12k = 12 \times 10 = 120$$

$$\text{Pour } p = 7 \text{ on a } b = 12p = 12 \times 7 = 84$$

$$\text{Pour } k = 26 \text{ on a } a = 12k = 12 \times 26 = 312$$

$$\text{Pour } p = 25 \text{ on a } b = 12p = 12 \times 25 = 300$$

les couples (k ; p) qui vérifient

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

Sont (120 ; 84) et (312 ; 100)