

Négation d'une propositions : $\bar{P}$

- La **négation** de la proposition P est la proposition noté $\bar{P}$ ou non P et qui est **vraie** si P est **fausse** et **fausse** si P est **vraie**

Conjonction : $(P \text{ et } Q)$; disjonction : $(P \text{ ou } Q)$

- la proposition $(P \text{ et } Q)$ est vraie ssi P et Q sont toutes les **deux sont vraies**
- la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est fausse SSI les deux propositions **P et Q sont fausses**

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

- la négation de $(P \text{ et } Q)$ est : $(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
- la négation de $(P \text{ ou } Q)$ est : $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

Implication: $(P \Rightarrow Q)$; Equivalence: $(P \Leftrightarrow Q)$

- L'implication de P et Q est la proposition $(\bar{P} \text{ ou } Q)$; noté par $P \Rightarrow Q$
- l'**équivalence** de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ qu'on note par : $P \Leftrightarrow Q$ et qui est vraie ssi P et Q ont la même valeur de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

- la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \bar{Q})$
- Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est **vraie on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie**

Résumé de cour : Notion de logique

Quantificateur : $\forall$; $\exists$

- Le quantificateur **pour tout** ou **quel que soit** est noté par : $\forall$.

La proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie

- Le quantificateur **il existe au moins un** est noté par : $\exists$

la proposition $(\exists x \in E); p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- Le quantificateur **il existe un unique** est noté par : $\exists!$

la proposition $\exists! x \in E; p(x)$ est vraie lorsqu'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- $(\forall x \in E); \overline{p(x)}$ est : $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$
- $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est : $(\forall x \in E); \overline{p(x)}$

1) Résonnement par contre-exemple

Pour montrer que la proposition

$(\forall x \in E); p(x)$ est **fausse** , il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est **vraie**

2) Résonnement par contraposition

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

Pratiquement : on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est vraie

3) Résonnement par disjonction des cas

Ce type consiste à appliquer la loi suivant :

$$[(P \text{ ou } R) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q \text{ et } R \Rightarrow Q]$$

Pratiquement : Pour montrer que la proposition

$(\forall x \in E); p(x)$ est vraie on montre que $p(x)$ est vraie pour un partie **A** de **E** puis on montre que $p(x)$ est vraie pour les **x n'appartenant pas à A**

1 Bac sciences

4) Résonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition **P est vraie** On suppose que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse **$(Q \text{ et } \bar{Q})$ (contradiction)** donc on conclut que P est vraie

5) Résonnement par Equivalence

Soient P ; Q et R des propositions

$$[(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [P \Leftrightarrow R \text{ et } R \Leftrightarrow Q]]$$

Pratiquement

On établit l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ à l'aide d'une chaîne d'équivalences successives

6) Résonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$; pour montrer que la proposition

$(\forall n \geq n_0); p(n)$ est vraie , on montre que :

- $p(n_0)$ est vraie
- $(\forall n \geq n_0); [p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ est vraie

Pratiquement :

On suit les trois étapes suivantes

- **Initialisation** : Pour $n = n_0$, on vérifie que la proposition $p(n_0)$ est vraie
- **Hérédité** : fixons un $n \geq n_0$
Supposons que $p(n)$ est vraie et montrons que $p(n+1)$ est vraie
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence en conclut que :
 $(\forall n \geq n_0); p(n)$ est vraie