

Chapitre 5 : Produit scalaire dans le plan

I) Définition et propriétés

1) Définition du produit scalaire

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Le nombre réel positif $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **le carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

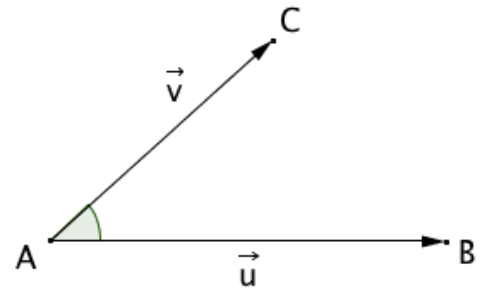
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$$

2) Définition (Orthogonalité de deux vecteurs)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.



II) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Définition :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan, et O un point du plan.

- On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée si : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
- Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère orthonormé direct.

Dans toute la suite du chapitre, on considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$.

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\|\vec{j}\|^2 \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, le repère étant orthogonal.

Propriété :

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan. On a $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Exemple :

Soit $\vec{u}(5; -4)$ et $\vec{v}(-3; 7)$ deux vecteurs.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

1) Norme d'un vecteur et distance entre deux points

Soit $\vec{U}(x; y)$ un vecteur dans le plan

- La norme de vecteur $\vec{U}$ est : $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Résultat : Distance entre deux points :

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points

- Coordonnées de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $(x_B - x_A; y_B - y_A)$
- La distance AB est la norme de vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2) Formule de $\cos(\overrightarrow{U}; \overrightarrow{V})$ et $\sin(\overrightarrow{U}; \overrightarrow{V})$

Activité

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs non nuls

On pose $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \equiv \alpha[2\pi]$ et le vecteur $\vec{w}(-y; x)$

1) Déterminer $\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

en fonction de $x; y; x'$ et y'

2) Calculer $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\det(\vec{u}; \vec{v})$

et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ en fonction

de $x; y; x'$ et y'

3) Montrer que $(\overrightarrow{v}; \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]$

4) Montrer $\sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

Solution :

1) On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

$$\text{Donc : } \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

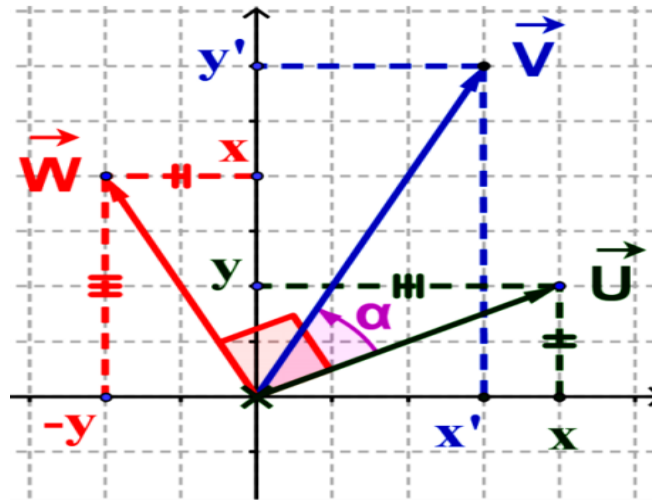
2) On a : $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$= -x' \times y + y' \times x$$

$$= xy' - x'y$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Et :} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$



$$\begin{aligned}
 3) \text{ Montrons que : } (\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) &\equiv (\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}) \\
 &\equiv -\alpha + \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
 &\equiv \frac{\pi}{2} - \alpha [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$5) \text{ Montrons } \sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) &= \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|} \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{xy' - x'y}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} \\
 \sin(\alpha) &= \frac{xy' - x'y}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} \\
 \sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) &= \frac{\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}
 \end{aligned}$$

Propriété :

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs non nuls

$$\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ et } \sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

4) Surface d'un triangle ABC

Activité

Considérons un triangle ABC et H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)

1) Déterminer l'aire du triangle ABC

2) Exprimer A en fonction de $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$

Solution :

1) L'aire du triangle ABC

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2}$$

2) Exprimer l'aire en fonction de $|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$

$$\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\frac{CH}{AC} = \frac{\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}{AB \times AC}$$

$$CH \times AB = \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

$$A_{ABC} = \frac{CH \times AB}{2} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|}{2}$$

Propriété :

Considérons un triangle ABC . La surface du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|}{2}$

III) Équation de droite de vecteur normal donné

Activité :

Soient $A(1; 2)$ et $B(-2; 3)$ deux points du plan et (Δ) la droite passant par A et perpendiculaire à (AB) .

Soit $M(x, y) \in (\Delta)$.

- 1) Vérifier, sans calcul, que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
- 2) En déduire une équation cartésienne de (Δ) .

Solution :

1) on a : $A \in (\Delta)$ et : $M \in (\Delta)$

Et : $(AB) \perp (\Delta)$

Donc : $(AB) \perp (AM)$

Alors : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

2) L'équation cartésienne de (Δ) :

$$\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$$

$$\overrightarrow{AB}(-2 - 1; 3 - 2)$$

$$\overrightarrow{AB}(-3; 1)$$

Soit $M(x, y) \in (\Delta)$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -3 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -3x + 3 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 1 = 0$$

Donc, une équation cartésienne de (Δ) est : $-3x + y + 1 = 0$

1) Vecteur normal à une droite :

Définition :

Soit $(D) = D(A; \vec{u})$ une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Tout vecteur non nul et orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal** à la droite (D) .

Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

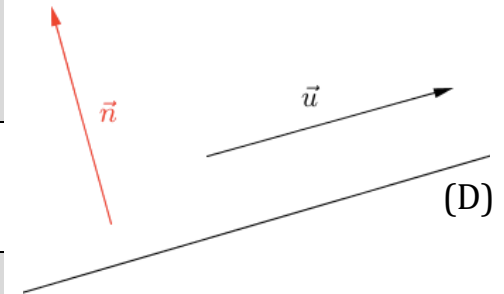
- Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à (D) .
- Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D) .

2) Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété :

Une équation de la droite (D) passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$



Exemple :

Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5; 3)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan, on a $M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\Leftrightarrow (x - 1) \times 5 + (y - 2) \times 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5 + 3y - 6 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3y - 11 = 0.$$

Donc, une équation cartésienne de (D) est : $5x + 3y - 11 = 0$.

3) Position relative de deux droites

Propriété :

Soient (D) et (D') deux droites et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ leurs vecteurs normaux respectives. On a

- $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.
- $(D) // (D') \Leftrightarrow \det(\vec{n}; \vec{n}') = 0$.

4) Distance d'un point à une droite (D)

Propriété

Soit (D) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (D) est $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemple :

On considère la droite (D) d'équation $4x + 3y + 1 = 0$ et les points $A(2; 1)$ et $B(-1; 1)$.

On a $d(A; (D)) = \frac{|2 \times 4 + 1 \times 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$ et $d(B; (D)) = \frac{|-1 \times 4 + 1 \times 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0$ donc $B \in (D)$

III. Équations de cercle

1) Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon :

Activité :

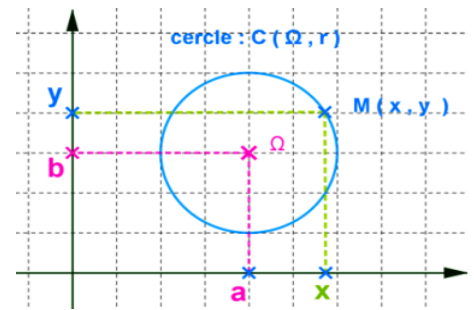
On considère (C) le cercle de centre $\Omega(1; 1)$ et de rayon 2 .

Soit $M(x; y)$ point du plan.

Montrer que $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

Définition:

Le cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.



Propriété

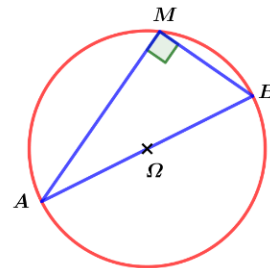
Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ que l'on peut écrire : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$.

2) Équation d'un cercle défini par son diamètre :

On considère le cercle (C) de diamètre $[AB]$.

On a : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$



Soient A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$ et d'équation cartésienne $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

3) Représentation paramétrique du cercle

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R .

On a : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1.$$

Donc il existe un réel θ tel que $\frac{x-a}{R} = \cos \theta$ et $\frac{y-b}{R} = \sin \theta$.

Alors : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$

Propriété

Le cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifient le système $(S) : \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} / (\theta \in \mathbb{R})$.

Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** du cercle (C) .

4) Intérieur et extérieur d'un cercle :

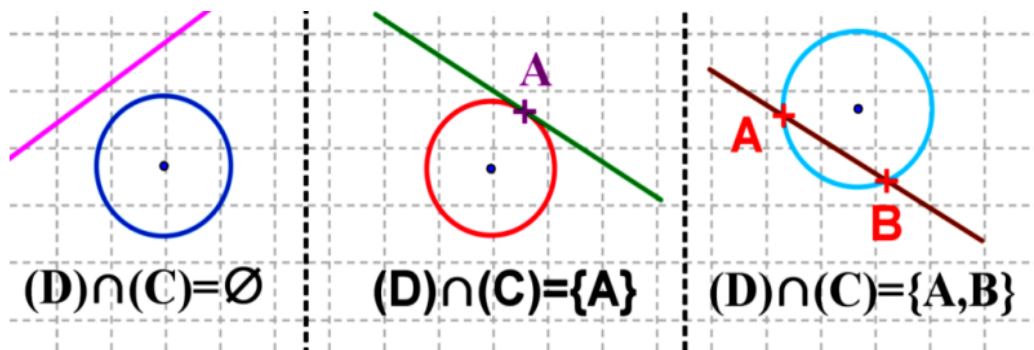
Propriété

Soit (C) un cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ et $M(x_0; y_0)$ un point du plan.

- M est un point du cercle (C) si et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.
- M est à l'intérieur du cercle (C) si et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$.
- M est à l'extérieur du cercle (C) si et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$.

5) Position relative de cercle (C) et la droite (D)

Pour étudier la position relative d'un cercle (C) de centre Ω et de rayon R avec une droite (D) on peut calculer la distance $d(\Omega; (D))$ et la comparer au rayon R .



Propriété :

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R et (D) est une droite du plan.

- Si $d(\Omega; (D)) > R$, alors la droite (D) ne coupe pas le cercle (C) .
- Si $d(\Omega; (D)) = R$, alors la droite (D) et le cercle (C) ont un seul point commun.
- Si $d(\Omega; (D)) < R$, alors la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points distincts.

6) Equation cartésien de la tangente d'un cercle :

Définition:

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R et A est un point de (C) .

On dit qu'une droite (D) est tangente à (C) au point A si et seulement si (D) et (ΩA) sont perpendiculaires au point A .

Propriété :

Soit (C) un cercle de centre Ω et A est un point de (C) et M est un point d'une droite (D) .

(D) est tangente à (C) au point A si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.

Exercice de synthèse :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(2; -1)$

$B(-4; -3), C(1; -3)$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b. Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ en déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

c. Calculer la surface du triangle ABC .

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (AC) .

3. On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$.

a. Déterminer le rayon et les coordonnées du centre de (C) .

b. Vérifier que (C) est le cercle de diamètre $[AB]$.

c. Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) tangente à (C) au point A .

d. Donner une représentation paramétrique de (C) .

4. Etudier la position relative du cercle (C) et la droite (D) , en déterminant les coordonnées des points d'intersection s'ils existent.

5. Résoudre graphiquement le système suivant
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 < 0 \\ x + 2y + 10 \geq 0 \end{cases}$$