

Exercice 01

Soient A et B deux points , déterminer a et b tel que G est le barycentre de (A, a) et (B, b) défini par la condition indiquée :

1) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$; 2) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Exercice 02

Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, -2)

1) Montrer que A est le barycentre de (G, 1) et (B, -2)

2) Montrer que B est le milieu de [AG]

Exercice 03

Soient A et B deux points

1) Construire $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 3)\}$

2) Construire $G' = \text{bary}\{(A, 3); (B, -2)\}$

3) Déterminer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Exercice 04

Soient A et B deux points

Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$

2) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB}\|$

Exercice 05

Dans un repère orthonormé on considère les points

A(1, 2) et B(-1, 2) et soit $G = \text{bary}\{(A, 4); (B, -2)\}$

Déterminer les coordonnées de G

Exercice 06

Soient ABC triangle :

Construire $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$ avec deux méthodes différentes

Exercice 07

ABC un triangle et $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

On considère $E = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et

$F = \text{bary}\{(A, 1); (C, 3)\}$ et $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 3)\}$

1) Montrer que G est le milieu du segment [CE]

2) Montrer que $G \in (BF)$

3) Montrer que $G \in (AK)$

4) Dédurre que les droites (CE), (BF) et (AK) sont concourantes en G

Exercice 08

ABCD un carré et $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1); (C, 2); (D, 1)\}$

Soient $I = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1)\}$ et $J = \text{bary}\{(C, 2); (D, 1)\}$;

1) Montrer que : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

2) En déduire que $G = \text{bary}\{(I, 1); (J, 3)\}$

3) Construire J et J puis K

Exercice 09

ABC un triangle. On considère les points E ; F tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F est le milieu du segment [AC] .

1) Montrer que $E = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$

2) Soit $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que G est le milieu de segment [CE]

3) Soit $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que les points A, K et G sont alignés

4) Déterminer (φ) l'ensemble des points M qui vérifie

$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = CE$

Exercice 01

Soient A et B deux points , déterminer a et b tel que G est le barycentre de (A, a) et (B, b) défini par la condition indiquée :

1) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$; 2) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Solution de l'exercice 01

1) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc ; $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 3)\}$

2) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Donc ; $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 1)\}$

Exercice 02

Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, -2)

1) Montrer que A est le barycentre de (G, 1) et (B, -2)

2) Montrer que B est le milieu de [AG]

Solution de l'exercice 01

1) $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, -2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow A = \text{bary}\{(G, 1); (B, -2)\}$

2) Montrer que B est le milieu de [AG]

$G = \text{bary}\{(A, 1); (B, -2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow B \text{ est le milieu de } [AG]$

Exercice 03

Soient A et B deux points

1) Construire $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 3)\}$

2) Construire $G' = \text{bary}\{(A, 3); (B, -2)\}$

3) Déterminer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Solution de l'exercice 03

Soient A et B deux points

1) Construire $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 3)\}$

$G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



2) Construire $G' = \text{bary}\{(A, 3); (B, -2)\}$

$G' = \text{bary}\{(A, 3); (B, -2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = \frac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = \frac{-2}{1}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = -2\overrightarrow{AB}$



3) Déterminer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2} - 2\right)\overrightarrow{AB} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{GG'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$

Exercice 04

Soient A et B deux points

Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$

2) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB}\|$

Solution de l'exercice 04

Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$

Soient A et B deux points

Considérons $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 3)\}$

Donc pour tous points M du plan on a : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10 \Leftrightarrow \|5\overrightarrow{MG}\| = 10$

$\Leftrightarrow 5MG = 10$

$\Leftrightarrow MG = 2$

Donc l'ensemble des points M de plan tel que $MG = 2$ est **le cercle (C)** de centre G et de rayon 2

2) $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB}\|$

Considérons $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 3)\}$

Donc pour tous points M du plan on a : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

Et considérons $G' = \text{bary}\{(A, 5); (B, -10)\}$

Donc pour tous points M on a : $5\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} = -5\overrightarrow{MG'}$

$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow \|5\overrightarrow{MG}\| = \|-5\overrightarrow{MG'}\|$

$\Leftrightarrow 5MG = 5MG'$

$\Leftrightarrow MG = MG'$

Donc l'ensemble des points M de plan tel que $MG = MG'$ est la droite (D) **la médiatrice** du segment [AB]

Solution de l'exercice 05

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{(a+b)} = \frac{4 \times 1 - 2 \times -1}{(4-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_G = \frac{ay_A + by_B}{(a+b)} = \frac{4 \times 2 - 2 \times 2}{(4-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

Exercice 06

Soient ABC triangle :

Construire $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$ avec deux méthodes différentes

Solution de l'exercice 06

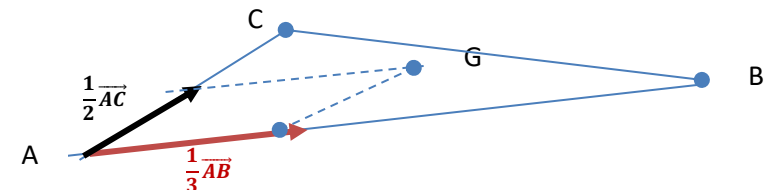
Construire $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

1^{ère} méthode : (Méthode de parallélogramme)

$$G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2^{ème} méthode : (Associativité du barycentre)

$G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

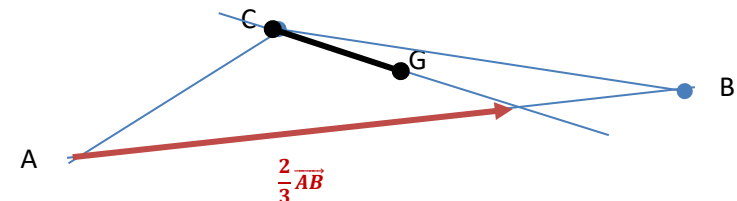
Considérons $H = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\}$

$$H = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ET d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = \text{bary}\{(H, a+b); (C, c)\}$. Donc : $G = \text{bary}\{(H, 3); (C, 3)\}$

Donc **G est le milieu** du segment [HC]



Exercice 07

ABC un triangle et $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

On considère $E = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et

$F = \text{bary}\{(A, 1); (C, 3)\}$ et $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 3)\}$

1) Montrer que G est le milieu du segment [CE]

2) Montrer que $G \in (BF)$

3) Montrer que $G \in (AK)$

4) Dédire que les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

Solution de l'exercice 07

1) Montrer que G est le milieu du segment [CE]

On a : $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

Et on a : $E = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = \text{bary}\{(E, 1 + 2); (C, 3)\}$

Donc : $G = \text{bary}\{(E, 3); (C, 3)\}$

Donc G est le milieu du segment [CE]

2) Montrer que $G \in (BF)$

On a : $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

Et on a : $F = \text{bary}\{(A, 1); (C, 3)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = \text{bary}\{(F, 1 + 3); (B, 2)\}$

Donc : $G = \text{bary}\{(F, 4); (B, 2)\}$. Donc $G \in (BF)$

3) Montrer que $G \in (AK)$

On a : $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

Et on a : $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 3)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = \text{bary}\{(K, 2 + 3); (A, 1)\}$

Donc : $G = \text{bary}\{(K, 5); (A, 1)\}$. Donc $G \in (AK)$

4) Dédire que les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

On a : G est le milieu du segment [CE] donc $G \in (CE)$

Et on a $G \in (BF)$ et $G \in (AK)$

Donc les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

Exercice 08

ABCD un carré et $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1); (C, 2); (D, 1)\}$

Soient $I = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1)\}$ et $J = \text{bary}\{(C, 2); (D, 1)\}$;

1) Montrer que : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

2) En déduire que $G = \text{bary}\{(I, 1); (J, 3)\}$

3) Construire J et J puis K

Solution de l'exercice 08

1) Montrer que : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

On a : $I = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique on a :

Pour tous points M on a : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$

On remplace M par G on trouve : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$

On a : $J = \text{bary}\{(C, 2); (D, 1)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique on a :

Pour tous points M on a : $2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MJ}$

On remplace M par G on trouve : $2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

2) En déduire que $G = \text{bary}\{(I, 1); (J, 3)\}$

On a : $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1); (C, 2); (D, 1)\}$

Donc $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Et on a : $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

Donc $\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GJ} = 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

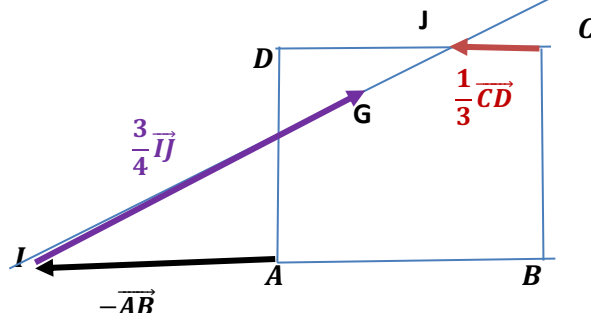
Donc $\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$. Donc : $G = \text{bary}\{(I, 1); (J, 3)\}$

3) Construire J et J puis K

$$I = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{-1}{(2-1)}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$$

$$J = \text{bary}\{(C, 2); (D, 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{(2+1)}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

$$G = \text{bary}\{(I, 1); (J, 3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{3}{(1+3)}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$$



Exercice 09

ABC un triangle. On considère les points E ; F tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F est le milieu du segment [AC] .

1) Montrer que $E = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$

2) Soit $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que G est le milieu de segment [CE]

3) Soit $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que les points A, K et G sont alignés

4) Déterminer (φ) l'ensemble des points M qui vérifie

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = CE$$

Solution de l'exercice 08

ABC un triangle. On considère les points E ; F tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F est le milieu du segment [AC] .

1) Montrer que $E = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$

$$\begin{aligned} 1) \quad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} - 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc ; $E = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$

2) Soit $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que G est le milieu de segment [CE]

On a : $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Et on a : $E = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$$G = \text{bary}\{(E, 1); (C, 1)\}$$

Donc G est le milieu du segment [CE]

3) Soit $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 1)\}$

Montrer que les points A, K et G sont alignés

On a : $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Et on a : $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 1)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$$G = \text{bary}\{(A, -1); (K, 4)\}$$

Donc les points A, K et G sont alignés

4) On a : $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$

Donc pour tous points M du plan on a :

$$\begin{aligned} &-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG} \\ \|\overrightarrow{-MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| &= CE \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = CE \\ &\Leftrightarrow 2MG = CE \\ &\Leftrightarrow MG = \frac{CE}{2} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M de plan est le cercle (C) de centre G et de rayon $\frac{CE}{2}$

