

Chapitre 4 : Ensembles des nombres

Activité : cocher les cases convenables :

	-2	$\frac{3}{2}$	12,34	π	$\sqrt{2}$	Notation de l'ensemble
Entier naturel						
Entier relatif						
Nombre décimal						
Nombre rationnel						
Nombre irrationnel						
Nombre réel						

I. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1) L'ensemble $\mathbb{N}$:

- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls :
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ou bien $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

Exemple :

$4 \in \mathbb{N}$ (4 appartient à l'ensemble des entiers naturels)

$-2 \notin \mathbb{N}$ (-2 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels)

2) L'ensemble $\mathbb{Z}$:

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Tout entier naturel est un entier relatif : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Exemple : $-2 \in \mathbb{Z}$ et $5 \in \mathbb{Z}$ et $0,33 \notin \mathbb{Z}$

3) L'ensemble $\mathbb{D}$:

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\mathbb{D}^+ = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ Est l'ensemble des nombres décimaux positifs.

Tout nombre entier relatif est un nombre décimal : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Exemple :

$$0,56 \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad 3 \in \mathbb{D}$$

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ car } \frac{1}{3} \approx 0,3333 \dots \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} \in \mathbb{D} \text{ car } \frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{10^2}$$

4) L'ensemble $\mathbb{Q}$:

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$ Est l'ensemble des nombres rationnels positifs.

Tout nombre décimal est un nombre rationnel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Exemple :

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}; 4 \in \mathbb{Q}; -4,8 \in \mathbb{Q}; \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Les nombres π et $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres rationnels ; ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où $((a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$.

Alors sont des nombres irrationnels.

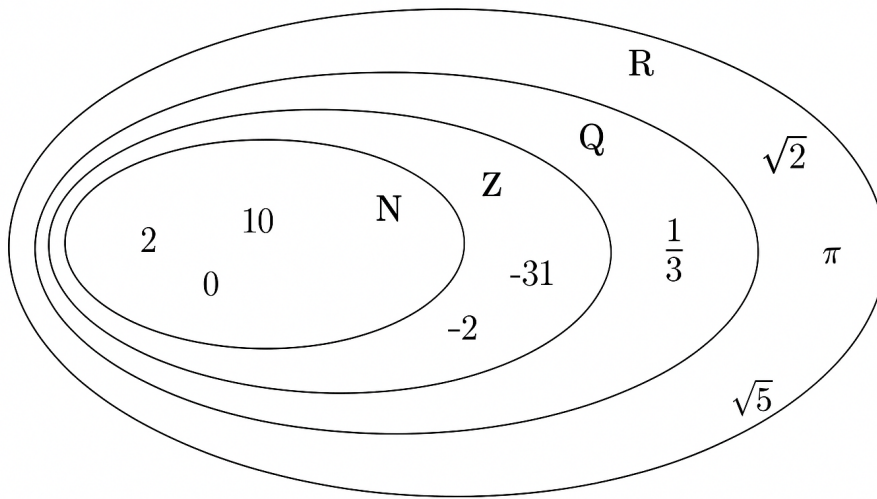
5) Nombres irrationnels :

Un nombre irrationnel est un nombre réel qui ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

6) L'ensemble $\mathbb{R}$:

- Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$
- Donc : $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$

Exemple :



Remarque :

- On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls et on écrit : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.
- On note $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.
- On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons dans la suite

II - Propriétés et des opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

• $a + b = b + a$ • $a + (b + c) = (a + b) + c$ • $a + 0 = 0 + a = a$ • $(-a) + a = a + (-a) = 0$	• $a \times b = b \times a$ • $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ • $a \times 1 = 1 \times a$ • $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
Si $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors : • $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ • $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$ alors : • $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ • $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

III – les racine carrées :

Définition :

Soit x un nombre réel positif

On appelle racine carrée de x le nombre réel positif y tel que : $x = y^2$ et on écrit $y = \sqrt{x}$

Propriété :

Si a et b sont deux nombres réels positifs :

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2} &= \sqrt{a^2} = a \\ \sqrt{a^n} &= \sqrt{a^n} ; (n \in \mathbb{N}) \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ \frac{a}{\sqrt{b}} &= \frac{a\sqrt{b}}{b} ; (b \neq 0)\end{aligned}$$

Exemple : Simplifier :

$$\begin{aligned}A &= 3\sqrt{8} - 4\sqrt{50} - 6\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{4 \times 2} - 4\sqrt{25 \times 2} - 6\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2^2 \times 2} - 4\sqrt{5^2 \times 2} - 6\sqrt{2} \\ &= 3 \times 2\sqrt{2} - 4 \times 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= (6 - 20 - 6)\sqrt{2} \\ A &= -20\sqrt{2}\end{aligned}$$

IV – Les puissances : puissances de 10 :

Définition :

Soit a un nombre réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $a^0 = 1$ et : $a^1 = a$

$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$; n facteurs

On note a^{-n} l'inverse de a^n ; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

On lit le nombre a^n « a puissance n » ou « a exposant n »

Propriétés : Opérations sur les puissances :

Soient x et y deux nombres réels,

Pour tout entiers relatifs m et n :

$x^m \times x^p = x^{m+p}$	$\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p} (x \neq 0)$
$(x^m)^p = x^{m \times p}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} (y \neq 0)$
$(x \times y)^m = x^m \times y^m$	

Exemple :

$$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6 \quad ; ; \quad \frac{\sqrt{2}^8}{\sqrt{2}^6} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Propriété : n un nombre entier naturel :

$$10^n = \underbrace{1000 \dots 0}_{n \text{ zéro}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \underbrace{0,000 \dots 01}_{n \text{ zéro}}$$

Définition : Écriture scientifique

Soit x un nombre décimal positif, où $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq a < 10$

L'écriture scientifique de x est : $x = a \times 10^n$

L'ordre de grandeur du nombre x :

- Si $1 \leq a < 5$ l'ordre de grandeur de x est 10^n
- Si $5 \leq a < 10$ l'ordre de grandeur de x est 10^{n+1}

Exemple :

$$-0,0000035 = -3,5 \times 10^{-6} \quad ; \quad -73385 = -7,3385 \times 10^4$$

VI - Les identités remarquables :

Propriété : Pour tous nombres réels a et b on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Pour tous a, b, c et d de $\mathbb{R}$.

$\xrightarrow{\text{Développement}}$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$\xleftarrow{\text{Factorisation}}$

Exemple :

1 - Développer les expressions suivantes :

$$A = (x^2 + 1)(2x + 1)$$

$$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$B = (2x + 3)^2$$

$$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$$

$$= 4x^2 + 12x + 9$$

$$C = (x + \sqrt{2})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{2} + 3x\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3$$

$$= x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$$

2 - Factoriser les expressions suivantes :

$$D = 2(4x - 1) + 3(4x - 1)^2$$

$$= (4x - 1)[2 + 3(4x - 1)]$$

$$= (4x - 1)(2 + 12x - 3)$$

$$= (4x - 1)(12x - 1)$$

$$E = 27 - 8x^3 = 3^3 - (2x)^3$$

$$= (3 - 2x)[3^2 + 3 \times (2x) + (2x)^2]$$

$$= (3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$$