

Chapitre 3 : Barycentre

I) Barycentre de deux points pondérés

Activité

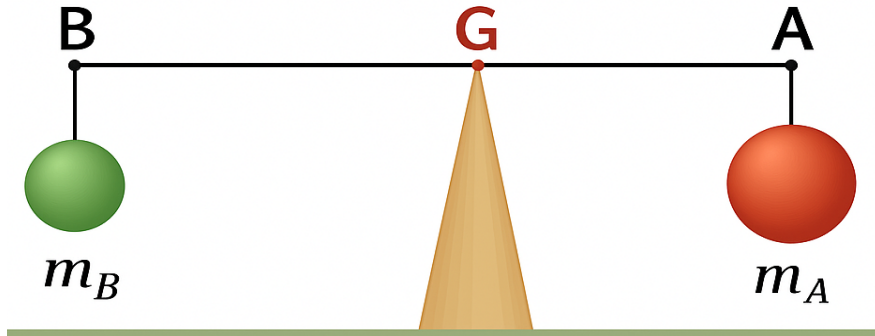
Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur 1 m, on considère deux boules métalliques :

- une boule de masse $m_A = 500$ g placée en A,
- une boule de masse $m_B = 350$ g placée en B.

En physique, lors de l'équilibre du système, l'égalité vectorielle suivante est vérifiée :

$$m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Déterminer la position du point G sachant que le système est en équilibre.



Solution :

On applique la relation d'équilibre des moments :

$$m_1 \overrightarrow{GA} + m_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Cela signifie :

$$m_1 \times GA = m_2 \times GB$$

Et :

$$\begin{aligned} GA + GB &= AB = 1 \\ 500 \times GA &= 350 \times GB \end{aligned}$$

On remplace : $GB = 1 - GA$:

$$\begin{aligned} 500 \times GA &= 350 \times (1 - GA) \\ 500GA &= 350 - 350GA \\ 500GA + 350GA &= 350 \\ 850GA &= 350 \\ GA &= \frac{350}{850} = 0,4117 \approx 0,41 \text{ m} \end{aligned}$$

Conclusion : Le point G se trouve à **0,41 m de A** (et donc à 0,59 m de B).

Position de G :

$$GA = 0,41 \text{ m.} \quad \text{et} \quad GB = 0,59 \text{ m}$$

Définition :

Soient deux points A et B du plan, associés à deux nombres (ou masses) m_A et m_B .

Le **barycentre** G de ces deux points pondérés est le point tel que :

$$m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

- si $m_A = m_B$, alors G est **au milieu** du segment [AB],

- si $m_A > m_B$, alors G est **plus proche de A**,
- si $m_B > m_A$, alors G est **plus proche de B**.

Théorème et définition :

Soient A et B deux points et $a ; b$ deux réels

Si $a + b \neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

G est appelé **le barycentre** de points pondérés (A, a) et (B, b)

On écrit $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0} &\Leftrightarrow a \overrightarrow{GA} + b (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{GA} = -b \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow (a + b) \overrightarrow{AG} = b \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Et on a : $a + b \neq 0$ alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}$$

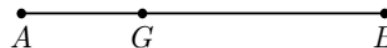
Donc le point G existe et unique

Exemple :

Soient A et B deux points

Placer $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 1)\}$

$$\begin{aligned} G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 1)\} &\Leftrightarrow 2 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 3 \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



Remarque :

$G = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$ Alors les points A, B et G sont alignés c-t-dire $G \in (AB)$

Cas particulier : Isobarycentre

➤ Si $a = b$: G est appelé l'isobarycentre de (A, a) et (B, b)

Dans ce cas : G est le milieu du segment $[AB]$

➤ G est le milieu du segment $[AB]$ alors :

$$G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1)\}$$

Propriétés de barycentre de deux points

Invariance du barycentre de deux points

Soient A et B deux points et k un réel

Pour tout $k \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} G &= \text{bary}\{(A, a); (B, b)\} \\ &= \text{bary}\{(A, ka); (B, kb)\} \end{aligned}$$

Propriété caractéristique du barycentre de deux points

Soient A et B deux points

G est le barycentre de (A, a) et (B, b) ssi pour tous points M du plan

$$\text{on a : } a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}$$

Résultat :

G est le barycentre de (A, a) et (B, b)

$$\text{Donc pour } M = A \text{ on a : } \overrightarrow{AG} = \frac{b}{(a+b)} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Pour } M = B \text{ on a : } \overrightarrow{BG} = \frac{a}{(a+b)} \overrightarrow{BA}$$

Cordonnées de G dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Considérons les deux points A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B)

Et soit $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$

Dans la propriété caractéristique on pose $M = O$, on trouve

$$x_G = \frac{a x_A + b x_B}{(a+b)} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{a y_A + b y_B}{(a+b)}$$

II) barycentre de trois points pondérés

Théorème et définition

Soient A ; B et C trois points et a ; b et c des réels

Si $a + b + c \neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G est appelé le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B, b) et (C, c) .

On écrit $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

Cas particulier : Centre de gravité un triangle

➤ Si $a = b = c$ alors G est appelé centre de gravité du triangle ABC ;

$$\text{C-à-dire que } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

➤ G le centre de gravité du triangle ABC

$$\text{Alors : } G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$$

Propriétés de barycentre de trois points pondérés

1) Invariance du barycentre

Théorème :

Soient A ; B et C trois points et k un réel

Pour tout $k \neq 0$ on a : $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b), (C, c)\}$
 $= \text{bary}\{(A, ka); (B, kb), (C, kc)\}$

2) Propriété caractéristique du barycentre de trois points pondérés

Théorème :

Soient $A; B$ et C trois points et $a; b$ et c trois réels tel que

$$a + b + c \neq 0$$

G est le barycentre de (A, a) et (B, b) et (C, c) ssi pour tout points M du plan

$$\text{on a : } a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}$$

Résultat : Construction et position du G

(Méthode de parallélogramme)

G est le barycentre de $(A, a); (B, b)$ et (C, c) donc pour $M = A$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{(a + b + c)} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{(a + b + c)} \overrightarrow{AC}$$

G est le barycentre de $(A, a); (B, b)$ et (C, c) donc pour $M = B$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{a}{(a + b + c)} \overrightarrow{BA} + \frac{c}{(a + b + c)} \overrightarrow{BC}$$

3) Associativité du barycentre

Théorème :

Soient $A; B$ et C trois points et $a; b$ et c des réels tel que

$$a + b + c \neq 0 \text{ et } a + b \neq 0$$

Si $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et $H = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$

Alors : $G = \text{bary}\{(H, a + b); (C, c)\}$