

Chapitre 02 : Généralités sur les fonctions

1) Ensemble de définition

Définition : L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments ayant une image par f ; noté D_f .

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

Exemples :

1) $\mathbb{R}$ est l'ensemble de définition de toute fonction polynôme.

2) $\mathbb{R}$ est le domaine de définition des fonctions cos et sin.

3) Soient f une fonction tel que $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$

$$D_f = \{\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \neq \sqrt{4} \text{ et } x \neq -\sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

4) Soient f une fonction tel que $f(x) = \sqrt{6-2x}$

$$D_f = \{\forall x \in \mathbb{R} / 6 - 2x \geq 0\}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x \geq -6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-2} \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; 3]$$

2) Parité d'une fonction

a) Fonction paire

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f

On dit que f est paire ssi $\begin{cases} \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(-x) = f(x) \end{cases}$

Théorème : Dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

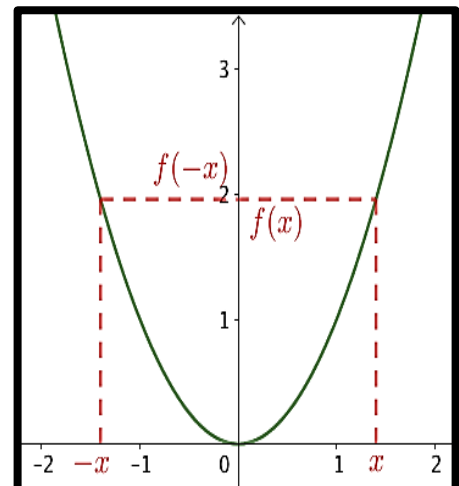
Exemple :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 1$ est paire.

L'ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{Et : } f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1$$



Donc : $f(-x) = f(x)$

D'où la fonction f est paire.

b) Fonction impaire

Définition : On dit que f est impaire ssi

$$\begin{cases} \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Théorème : Dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^3$ est impaire.

L'ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$

Et $f(-x) = 3(-x)^3 = -3x^3$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

D'où La fonction f est impaire.

3 - Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée :

Activité :

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que $(\forall x \in D_f) : f(x) \leq 3$.

Correction :

1 -

$$D_f = \{\forall x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$$

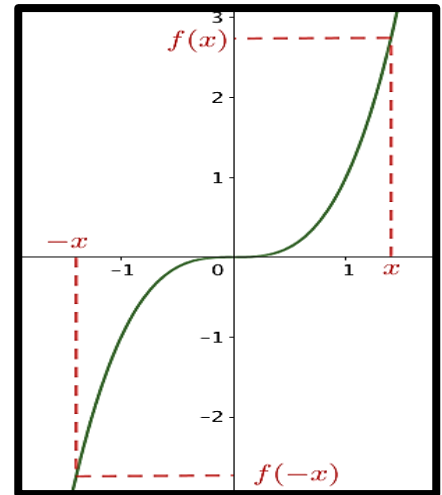
$$\Leftrightarrow x^2 \neq -1$$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2 - Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 \\ &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - \frac{3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - 3 \leq 0$ alors : $f(x) \leq 3$



On dit que f est majorée par 3 sur D_f .

3. Montrer que $(\forall x \in D_f): f(x) \geq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 \\ &= \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - 2 \geq 0$ alors : $f(x) \geq 2$

On dit que f est minorée par 2 sur D_f .

4. En déduire que $(\forall x \in D_f): 2 \leq f(x) \leq 3$.

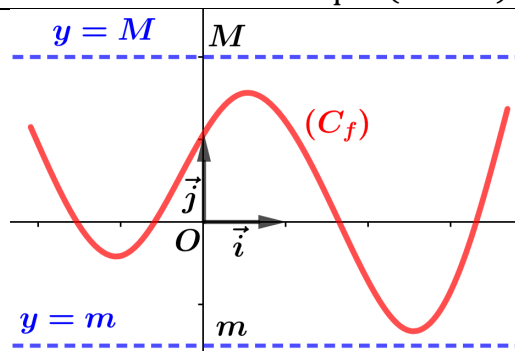
Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f(x) \geq 2$ et : $f(x) \leq 3$ donc : $2 \leq f(x) \leq 3$

On dit que f est bornée par 2 et 3 sur D_f .

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que $(\forall x \in I): f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que $(\forall x \in I): m \leq f(x)$.
- f est **bornée** sur I s'il existe des réels M et m tels que $(\forall x \in I): m \leq f(x) \leq M$.



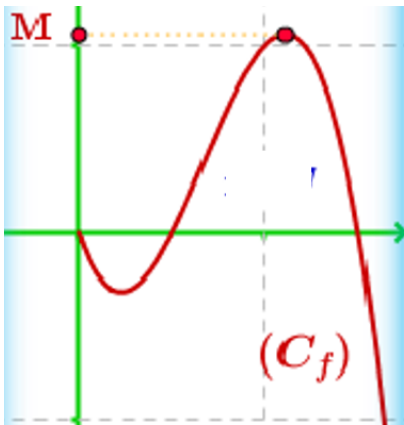
4) Extrémums d'une fonction numérique :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I . On dit que :

- $f(a)$ est la **valeur minimale** (ou le **minimum**) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \geq f(a)$.
- $f(a)$ est la **valeur maximale** (ou le **maximum**) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est un **extremum** de f sur I s'il est le maximum ou le minimum de f sur I .

Interprétation graphique :

le réel M le maximum de f



le réel m le minimum de f



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - (-3) = (x - 2)^2 \geq 0$ et : $f(2) = -3$.

alors : $f(x) \geq f(2)$

Donc le nombre $-3 = f(2)$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$

5) Comparaison de deux fonctions :

Définition : Soient f et g deux fonctions et D un ensemble inclus dans $D_f \cap D_g$.

- ✓ Si $f = g$ sur D , alors la courbe de f est confondue avec la courbe de la fonction g sur D
- ✓ Si $f > g$ sur D , alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D .
- ✓ Si $f \leq g$ sur D , alors (C_f) est en-dessous de (C_g) sur D .

Exemple :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+2}$ et $g(x) = x + 1$.

On a : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+2} > 0$

Donc : $f > g$ sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique : Soient f et g deux fonctions définies sur D

➤ On dit que f est positive ssi : Pour tout $x \in D ; f(x) \geq 0$

Interprétation géométrique : (C_f) la courbe de f est au dessus de (Ox) sur D

➤ On dit que f est négative ssi : pour tout $x \in D ; f(x) \leq 0$

Interprétation géométrique : (C_f) la courbe de f est en dessous de (Ox) sur D

➤ On dit que f est supérieure à g ssi : Pour tout $x \in D ; f(x) \geq g(x)$.

Interprétation géométrique : (C_f) la courbe de f est au dessus de (C_g) la courbe de g sur D

Remarque :

Etudier la position relative de deux courbes de deux fonctions f et g sur D revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in D$

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors : $f(x) > g(x)$ alors (C_f) est au dessus de (C_g) sur D
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors : $f(x) < g(x)$ alors (C_f) est en dessous de (C_g) sur D

Remarque : la monotonie et la parité d'une fonctions

f une fonction tel que $D_f = I \cup J$ avec I et J sont des intervalles symétrique par rapport à zéro

- Si f est paire sur D_f alors le sens des variations de f sont opposées sur I et J
- Si f est impaire sur D_f alors le sens des variations de f sont les même sur I et J

6) Sens de variations d'une fonction :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est croissante sur I si :

$$\text{Pour tout } a; b \in I : a > b \text{ on a } f(a) \geq f(b).$$

- La fonction f est décroissante sur I si :

$$\text{Pour tout } a; b \in I : a > b \text{ on a } f(a) \leq f(b).$$

- La fonction f est constante sur I si :

$$\text{Pour tout } a; b \in I : a \neq b \text{ on a } f(a) = f(b).$$

- La fonction est monotone sur l'intervalle I si la fonction est croissante ou décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4x + 1$

Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Soient $(a ; b) \in \mathbb{R}$ tels que : $a > b$

$a > b$ donc : $-4a < -4b$

$$\text{Donc: } -4a + 1 < -4b + 1$$

$$\text{Donc: } f(a) < f(b)$$

Donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Remarque : Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I , on calcule T le taux de variations :

$$T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ avec } x \neq y.$$

- Si $T > 0$ alors f est strictement croissante
($T \geq 0$ alors f est croissante).
- Si $T < 0$ alors f est strictement décroissante
($T \leq 0$ alors f est décroissante)
- Si $T = 0$ pour tout x et y de I alors f est constante.

7) Etude des fonctions usuelles :

a) Etude et représentation graphique de fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

Éléments caractéristiques																		
Domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$	Le sommet de la parabole $\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$	Axe de symétrie de (C_f) $x = \frac{-b}{2a}$																
Tableau de variations	Si : $a > 0$ <table><tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	X	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	f(x)				Si : $a < 0$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	f(x)			
X	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$															
f(x)																		
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$															
f(x)																		
La nature de la courbe (C_f) : La courbe (C_f) de f est un parabole de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ et d'axe de symétrie est droite d'équation : $x = \frac{-b}{2a}$																		

b) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

Propriété : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ Avec $a; b; d \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$

Éléments caractéristiques																		
Domaine de définition de f $D_f = \left] -\infty; \frac{-d}{c} \right[\cup \left] \frac{-d}{c}; +\infty \right[$	Centre de l'hyperbole $\Omega \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$	Les asymptotes à (C_f) $x = \frac{-d}{c}$ asymptotes verticale $y = \frac{a}{c}$ asymptotes horizontale																
Le sens des variations de f sur D_f On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	Si $\Delta > 0$ alors f est str croissante sur D_f <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$	f(x)				Si $\Delta < 0$ alors f est str décroissante sur D_f <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$	f(x)			
x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$															
f(x)																		
x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$															
f(x)																		
La nature de la courbe (C_f) : La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega \left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c} \right)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$																		

C) Etude et représentation graphique de fonctions $f: x \mapsto ax^3$.

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto ax^3$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$.

Ce qui entraîne que f est impaire, donc qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$

➤ Si $a > 0$:

On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$ (car x et y sont positifs)

$$\Rightarrow ax^3 < ay^3 \text{ (car } a > 0)$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y).$$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu'elle est impaire, alors elle croissante sur $]-\infty; 0]$.

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

➤ Si $a < 0$:

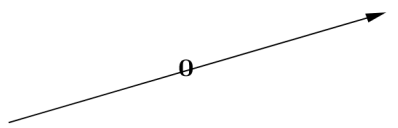
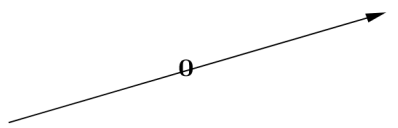
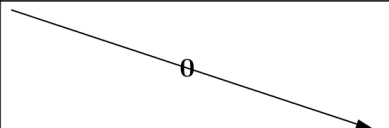
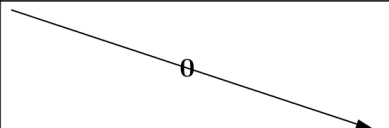
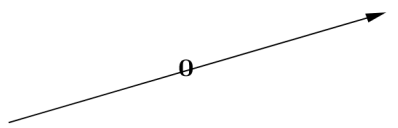
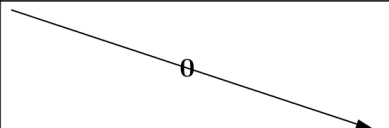
On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

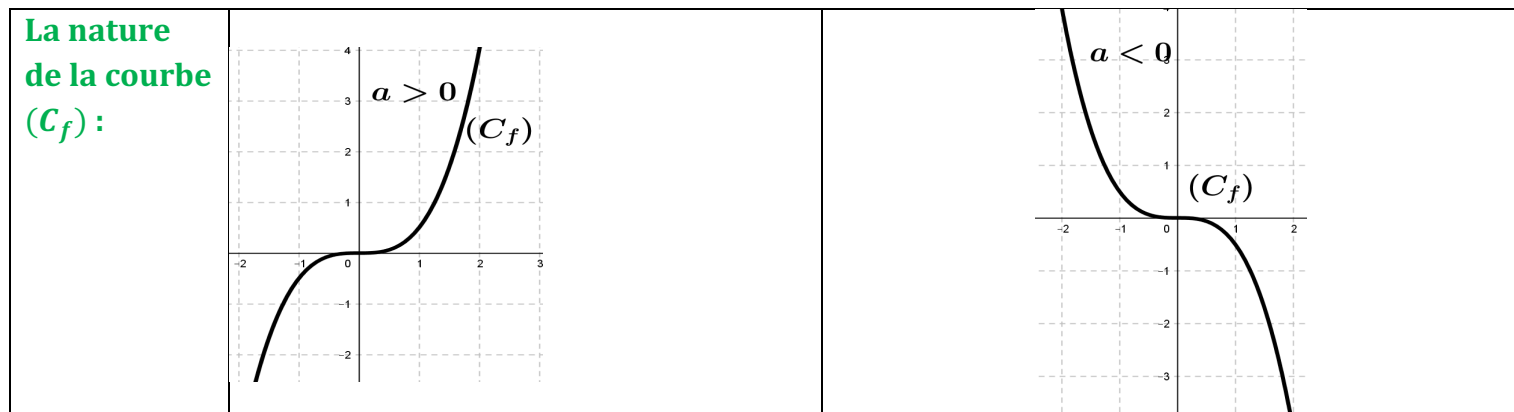
$$\Rightarrow ax^3 > ay^3 \text{ (car } a < 0)$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y).$$

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu'elle est impaire, alors elle décroissante sur $]-\infty; 0]$.

D'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Éléments caractéristiques																	
Domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$																	
Le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$	$a > 0$	$a < 0$															
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$				<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$		
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f(x)$																	
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f(x)$																	



D) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$.

On a $D_f = [-a; +\infty[$.

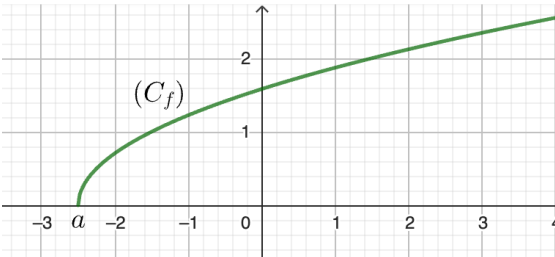
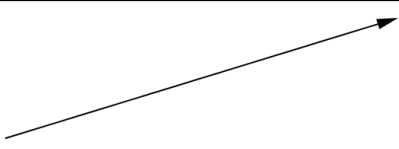
Soient x et y deux éléments de $D_f = [-a; +\infty[$ tels que $x < y$.

On a : $x < y \Rightarrow x + a < y + a$

$$\Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y).$$

Donc f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.

Domaine de définition de $f : D_f = [-a; +\infty[$			
Tableau de variations		Représentation graphique	
x	$-a$ 0 $+\infty$		
$f(x)$			

8) Composée de deux fonctions

Définition :

g est une fonction définie sur un intervalle J et f est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$.

La fonction **composée** de f et g dans cet ordre, noté $g \circ f$, est la fonction définie pour tout $x \in I$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarques :

- $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$.
- En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple :

Soient $f: x \mapsto x^2$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, et $g: x \mapsto \frac{2x}{x-4}$, définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- Domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$:

On a $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \neq 2.$$

Donc $D_{g \circ f} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

- Expression de la fonction composée $g \circ f$:

On a $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{2x^2}{x^2-4}.$$

Propriété :

- ❖ Si f et g ont le même sens de variations sur I et $f(I)$ (resp) alors $g \circ f$ est croissante sur I .
- ❖ Si f et g ont du sens de variations contraire sur I et $f(I)$ (resp) alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

9) Fonction périodique :

Activité : La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$.

Graphiquement : $f(-2) = -2$. Et : $f(2) = -2$

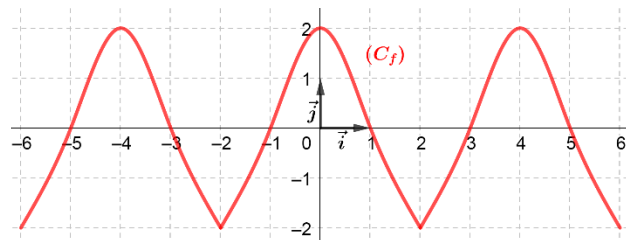
$f(0) = 2$. Et : $f(4) = 2$

$f(1) = 0$ Et : $f(5) = 0$

Alors : $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la relation entre $f(x+4)$ et $f(x)$.

$$f(x+4) = f(x).$$



Définition :

Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif.

On dit que f est périodique sur D si :

- $x + T \in D$ pour tout x de D .
- $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de D .

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont périodiques de période 2π .
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période π .