

Niveau premier bac
sciences expérimentales

Chapitre 1 : Notions de logique

Premier bac sc EXP

- **Cours détaillé**
- **Résumé de cours**
- **Série corrigée 1**

<https://www.dorosmaroc.com>

A) Propositions – Fonction propositionnelle

Exemples :

- Le texte mathématique $(P): -2 \in \mathbb{N}$, a un sens faux, donc on dit que (P) est une **proposition fausse**
- $(Q): "Pour tous x dans $\mathbb{R}; x^2 \geq 0$ " est un texte mathématique qui a un sens vrai$

On dit (Q) est une proposition vraie

- $(T): x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 = 0$; ce texte dépend d'un paramètre x appartient à l'ensemble $\mathbb{R}$; on ne peut pas dire est-ce-que (T) est vrai ou faux

Mais par exemple pour la valeur 1 ou -1, le texte (T) devient une proposition vraie et pour les autres valeurs de $\mathbb{R}$ le texte (T) devient une proposition fausse

Le texte (T) est appelé **une fonction propositionnelle** qui est toujours dépend d'un paramètre d'un ensemble (ou des paramètres)

1) Propositions

Définition

On appelle une proposition un énoncé des mots qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps)

Valeur de vérité d'une proposition

Si la proposition est vraie on note V ou 1

Si la proposition est fausse on note F ou 0

2) Fonction propositionnelle

Définition

Une fonction propositionnelle est une expression contenant une ou plusieurs variables, qui appartiennent à des ensembles déterminés

Une fonction propositionnelle est une expression contenant une ou plusieurs variables, qui appartiennent à des ensembles déterminés. Si on remplace les variables par un élément de ces ensembles, la fonction proposée devient une proposition

B) Opérations sur les propositions :

1) Négation d'une proposition : $\bar{P}$

Définition :

La négation de la proposition P est la proposition notée $\bar{P}$ ou non P et qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemples :

Proposition : P	Négation : $\bar{P}$
$(P): \pi \in \mathbb{N}$	$(\bar{P}): \pi \notin \mathbb{N}$
$(P): 1 + 2 = 5$	$(\bar{P}): 1 + 2 \neq 5$
$(P): \sqrt{2} > 1$	$(\bar{P}): \sqrt{2} \leq 1$

2) Conjonction de deux propositions : $(P \text{ et } Q)$; disjonction $(P \text{ ou } Q)$

Définitions

Soient P et Q deux propositions

- La conjonction de deux propositions P et Q et la proposition notée $(P \text{ et } Q)$ ou bien $(P \wedge Q)$ et qu'est vraie ssi **P et Q sont toutes les deux vraies**
- La disjonction de deux propositions P et Q et la proposition notée $(P \text{ ou } Q)$ ou bien $(P \vee Q)$, et qu'est fausse ssi les deux propositions **P et Q sont fausses**

Tableau de vérité de : $(P \text{ et } Q)$ et $(P \text{ ou } Q)$

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Propriété :

(Lois de MORGAN)

- La négation de la proposition $(P \text{ et } Q)$ est la proposition $(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
- La négation de la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est la proposition $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

Exercice 1

Etudier la valeur de vérité et déterminer la négation des propositions suivantes :

$P_1 : (4 - 1 = 3 \text{ ou } 6 \leq 0)$; $P_2 : (8 > 5 \text{ et } \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$ et $P_3 : (1 < \sqrt{2} < 2)$

Solution

Etudier la valeur de vérité et déterminer la négation des propositions suivantes :

$P_1 : (4 - 1 = 3 \text{ ou } 6 \leq 0)$ est vraie

$\bar{P}_1 : (4 - 1 \neq 3 \text{ et } 6 > 0)$

$P_2 : (8 > 5 \text{ et } \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$ est fausse

$\bar{P}_2 : (8 \leq 5 \text{ ou } \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$

$P_3 : (1 < \sqrt{2} < 2)$ est vraie

$P_3 : (1 < \sqrt{2} \text{ et } \sqrt{2} < 2)$

$\bar{P}_3 : (1 \geq \sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \geq 2)$

3) Implication de deux propositions $(P \Rightarrow Q)$

Définition :

La proposition $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ est appelé l'implication de P et Q , et elle est noté par : $P \Rightarrow Q$ et qui est **fausse** seulement si **P est vraie et Q est fausse**

Tableau de vérité de : $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 01 :

- La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication **réciroque** de l'implication $P \Rightarrow Q$
- La proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est appelée l'implication **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$
- La négation de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition : $(P \text{ et } \bar{Q})$

Exercice 2

Soit la proposition (P) suivante : $(\pi \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\pi = 3, 14)$

- 1) Déterminer la valeur de vérité de (P) .
- 2) Donner la négation de la proposition P .
- 3) Déterminer l'implication réciroque de l'implication (P)
- 4) Déterminer l'implication contraposée de l'implication (P)

Solution

Soit la proposition (P) suivante $(\pi \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\pi = 3, 14)$

1) Déterminer la valeur de vérité de (P).

D'après la table de vérité de l'implication on a (P) est fausse car $(\pi = 3, 14)$ est fausse

2) Donner la négation de la proposition P $(\pi \in \mathbb{R})$ ou $(\pi \neq 3, 14)$

4) Déterminer l'implication réciproque de l'implication (P)
 $(\pi = 3, 14) \Rightarrow (\pi \in \mathbb{R})$

5) Déterminer l'implication contraposée de l'implication (P)
 $(\pi \neq 3, 14) \Rightarrow (\pi \notin \mathbb{R})$

Remarque 02 :

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est vraie et on montre Q est vraie

Exercice 03

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$

2) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

3) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

Montrer que : $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

$$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que :

$$1 + x(y - 1) - y = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$1 + xy - x - y = 0 \Rightarrow 1 + x(y - 1) - y = 0$$

$$\Rightarrow x(y - 1) - y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y - 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$$

1) Montrer que : Si m et n sont des entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair

On a : m et n des entiers impairs donc il existe deux entiers naturels

k et k' tels que : $m = 2k + 1$ et $n = 2k' + 1$

$$\text{Donc : } m + n = 2k + 1 + 2k' + 1$$

$$\text{Donc : } m + n = 2k + 2k' + 2$$

$$\text{Donc : } m + n = 2(k + k' + 1)$$

Donc $m + n$ est un entier pair

2) Equivalence de deux propositions : $(P \Leftrightarrow Q)$

Définition

L'équivalence de deux propositions P et Q et la proposition $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ qu'on note par : $P \Leftrightarrow Q$ et qui est vraie ssi P et Q ont la même valeur de vérité

Tableau de vérité de : $(P \Leftrightarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercice 4

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions

suivantes : 1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

$$2) f(x) = \frac{x+4}{x^2-4} ; 3) f(x) = \sqrt{6-2x}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} ; 5) f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$

Rappel:

L'ensemble de définition d'une fonction f noté par D_f est l'ensemble des nombres réels x tel que $f(x) \in \mathbb{R}$

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

Solution

1) $f(x) = x^4 - 5x - 2$

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \neq 4$

$\Leftrightarrow x \neq \sqrt{4} \text{ et } x \neq -\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{6-2x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x \geq -6$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-2}$

$\Leftrightarrow x \leq 3$

Donc $D_f =]-\infty; 3]$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 0$

La proposition $(x-1)^2 + 1 \geq 0$ est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

2ème méthode : on peut calculer delta qui est négative donc le signe de $x^2 - 2x + 2$ est le signe de $a = 1 > 0$

Donc $x^2 - 2x + 2$ toujours positive pour tout x dans $\mathbb{R}$;

Donc $D_f = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x \geq 0$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 5x = 0$

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 5 = 0$

$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 5)$

Tableau de Signe de : $x^2 - 5x$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$	
$x^2 - 5x$	+	0	-	0	+

Donc : $D_f =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

C) Quantificateur universel: $\forall$ - Quantificateur existentiel : $\exists$

1) Quantificateur universel: $\forall$

Activité

Donner la valeur de vérité des propositions

(P): "Pour tous x dans $\mathbb{R}$; $x^2 + 2 \geq 0$ "

(Q): "Quel que soit x dans $\mathbb{R}$; Quel que soit y dans $\mathbb{R}$: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ "

(R): "Pour tous x dans $\mathbb{R}$; $\sqrt{x^2} = x$ "

Définition

- **'Pour tous' ou 'quel que soit' est appelé**
Quantificateur universel et il est noté par $\forall$
- La proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

2) Quantificateur existentiel : $\exists$

Activité

Donner la valeur de vérité des propositions

(P)"Il existe au moins un x de $\mathbb{R}$, $x^2 - 2 = 0$ "

(Q): "Il existe au moins un x de $\mathbb{R}$; il existe au moins y de $\mathbb{R}$ tel que : $x + y > 0$; (R)"Il existe un unique x de $\mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0$ "

Définition

- **'il existe au moins un'** est appelé quantificateur existentiel et il est noté par $\exists$
- La proposition $(\exists x \in E); p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie
- Le quantificateur **"il existe un unique"** est noté par : $\exists!$
- La proposition $\exists! x \in E; p(x)$ est vraie s'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

Propriétés :

$$\overline{(\forall x \in E); p(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E); \overline{p(x)}$$

$$\overline{(\exists x \in E); p(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E); \overline{p(x)}$$

Exercice 05

Montrer que les propositions suivantes sont vraies puis déterminer leurs négations :

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0 ;$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$P_3 : (\forall x \in [1; 6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0;$$

Rappel 2 : Signe de : $ax^2 + bx + c$

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$

Si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	signe de $-a$	signe de a	

Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ une racine dans $\mathbb{R}$ est : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	signe de a	

Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$

Tableau de Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Solution

Monter que les propositions sont vraies et déterminer leurs négations

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 = 0 ;$$

Résoudrons l'équation $3x + 6 = 0$

$$3x + 6 = 0 \text{ donc } 3x = -6, \text{ donc } : x = -\frac{6}{3} ; \text{ donc } x = -2$$

D'où P_1 est vraie

$$\overline{P_1} : (\forall x \in \mathbb{R}) : 3x + 6 \neq 0 ;$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 = 0;$$

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

Donc P_2 est vraie

$$\overline{P_2} : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 \neq 0;$$

$P_3 : (\forall x \in [1; 6]) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

On pose : $a = 1$; $b = -7$ et $c = 6$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \times 1} \text{ et } x_2 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 6 \text{ et } x_2 = 1$$

Tableau de Signe de $x^2 - 7x + 6$

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$	+	-	+	+

Donc P_3 est vraie

$\overline{P_3} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 7x + 6 > 0;$

$P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0;$

Résoudrons l'inéquation : $x^2 - 2x + 3 > 0$

On pose : $a = 1$; $b = -2$ et $c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$

Donc $\Delta < 0$ d'où l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Donc le Signe de $x^2 - 2x + 3$ est le signe de $a = 1 > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 3 > 0$

Donc P_4 est vraie

La négation de P_4

$\overline{P_4} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 3x + 2 \leq 0;$

Remarque : (Raisonnement par contre-exemple)

Pour montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est **fausse**, il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est **vraie**

Exemple :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{x^2} = x$ est fausse car sa négation $\exists x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2} \neq x$ est vrai pour $x = -1$

Exercice 06

1) Montrer que les propositions sont fausses :

$P_1 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x \rangle$

$P_2 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x \rangle$

2) a) Donner la négation de la proposition

$(R) : (\forall x \in \mathbb{R}) : [x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$

b) En déduire que la proposition R est fausse.

Solution

1) Montrer que les propositions sont fausses :

$P_1 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = x \rangle$

Montrons que $\overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} \neq x$ est vraie

Pour $x = -1$ on a $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Donc $1 \neq -1$

Donc $\overline{P_1}$ est vraie d'où est P_1 fausse

Remarque : on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2} = |x|$

$P_2 : \langle (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x \rangle$

Montrons que $\overline{P_2} : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 < x$ est vraie

Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ donc $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$

Donc $\overline{P_2}$ est vraie d'où est P_2 fausse

Remarque :

Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'inéquation $x^2 < x$

On trouve $S =]0; 1[$

2)a) Donner la négation de la proposition (R).

$$(R): (\forall x \in \mathbb{R}): [x^2 = 2x \Rightarrow x = 0]$$

Rappel : la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est : $(P \text{ et } \bar{Q})$

$$(\bar{R}): (\exists x \in \mathbb{R}): [x^2 = 2x \text{ et } x \neq 0]$$

b) En déduire que la proposition R est fausse.

Pour $x = 2$ on a : $x^2 = 2x$ et $x \neq 0$

Donc $\bar{R}$ est vraie d'où est R fausse

Remarque :

Pour trouver le contre-exemple on peut résoudre l'équation $x^2 = 2x$
On trouve $S = \{0; 2\}$

C) Types de Raisonnement

1) Raisonnement déductif

Principe de raisonnement

Si P et $(P \Rightarrow Q)$ sont vraies alors Q est vraie

Exercice 07

1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x + 1 \geq 2\sqrt{x}$.

2) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x + \frac{1}{x} \geq 2$;

Solution

1) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x + 1 \geq 2\sqrt{x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1^2 \geq 0x \\ \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x}$$

2) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x + \frac{1}{x} \geq 2$;

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \\ \Rightarrow x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Exercice 08

Soient a, b et c des réels positifs non nuls.

1) Montrer que $a + \frac{1}{a} \geq 2$

2) a) Montrer que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

b) Montrer que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Solution

Soient a, b et c des réels positifs non nuls.

1) Montrer que $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a - 1)^2}{a} \geq 0$$

Donc $a + \frac{1}{a} \geq 2$

2)a) Montrer $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Donc $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

b) En déduire que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

On a $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ et $c + a \geq 2\sqrt{ca}$

Donc $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ca}$

Donc $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$

Donc $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

2) Raisonnement par équivalence

Principe de raisonnement

On établit l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ à l'aide d'une chaîne d'équivalences successives

Exercice 09

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

2) Soient x et y deux réels positifs .

Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

3) Soient a et b deux réels positifs

Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0 \text{ et } b=0)$

4) x et y deux réels positifs.

Montrer que : $(x+y+13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) \Leftrightarrow (x=4 \text{ et } y=9)$

Solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+1}{x^2+1} &\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+1} - \frac{3}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x+1) - 3(x^2+1)}{2(x^2+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2+2x+2-3x^2-3}{2(x^2+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0 ; (\text{qui est vrais}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

2ème méthode :

On a : $x^2 + 1 > 0$ donc :

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+x+1) \leq 3(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+x+1) - 3(x^2+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+2-3x^2-3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 ; (\text{qui est vrais})$$

$$\text{Donc: } \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

2) Soient x et y deux réels positifs .

Montrer que : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Soient x et y deux réels positifs

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} &\Leftrightarrow \sqrt{x+y}^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\ &\Leftrightarrow x+y = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \\ &\Leftrightarrow x+y = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \\ &\Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{y} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{aligned}$$

3) Soient a et b deux réels positifs ;

Montrer que : $(a+b=0) \Leftrightarrow (a=0 \text{ et } b=0)$

Si $a=0$ et $b=0$ alors $a+b=0$

Montrons que : $a+b=0 \Rightarrow a=0 \text{ et } b=0$

On a : $a+b=0$ et $b \geq 0$

Donc : $a = -b$ et $b \geq 0$ donc $-b \leq 0$

Donc : $a \leq 0$ et on a : $a \geq 0$

Donc $0 \leq a \leq 0$ donc $a=0$

On a $a+b=0$ et $a=0$ donc $b=0$

Donc $a=0$ et $b=0$

4) Soient x et y deux réels positifs.

Montrer que : $x + y + 13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4$ et $y = 9$

$$\begin{aligned} x + y + 13 &= 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2 \times 2\sqrt{x} + 2^2 + \sqrt{y}^2 - 2 \times 3\sqrt{y} + 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + (\sqrt{y} - 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

On a : $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{y} - 3)^2 \geq 0$

Donc d'après le résultat précédent on a

$$(\sqrt{x} - 2)^2 = 0 \text{ et } (\sqrt{y} - 3)^2 = 0$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x} - 2 = 0 \text{ et } \sqrt{y} - 3 = 0$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x} = 2 \text{ et } \sqrt{y} = 3$$

$$\text{Donc : } x = 4 \text{ et } y = 9$$

3) Raisonnement par disjonction des cas

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie

On montre que $p(x)$ est vraie pour une partie A de E puis on montre que $p(x)$ est vraie pour les x n'appartenant pas à A

Exercice 10

1) Soit $n \in \mathbb{N}$;

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1): x^2 - |x - 1| - 1 = 0$

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}$;

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Cas 1 : n est pair donc $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k)^2 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 2k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Cas 1 : n est pair donc $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k + 1)^2 + 2k + 1 + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 2 \\ &= 4k^2 + 6k + 2 + 1 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Cas 1 : $x \in]-\infty; 0]$; $c - t - \text{dire } x \leq 0$

On a $x \leq 0$ donc $-x \geq 0$ Et on a : $\sqrt{x^2 + 1} > 0$

Donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

Cas 2 : $x \in]0; +\infty[$; $c - t - \text{dire } x > 0$

1ère méthode :

On a : $x^2 + 1 > x^2$ donc : $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$ donc : $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$

Et on a : $x > 0$ donc $|x| = x$ donc : $\sqrt{x^2 + 1} > x$

Donc : $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$

2ème méthode :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} > 0 ; \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$(E_1): x^2 - |x - 1| - 1 = 0$

Rappel :

$$|x - 1| = x - 1 \quad \text{si } x \geq 1$$

$$|x - 1| = -(x - 1) \quad \text{si } x < 1$$

Cas 1 : $x \in [1; +\infty[$; c - t - dire $x \geq 1$

Donc $|x - 1| = x - 1$

$$x^2 - |x - 1| - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - (x - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Or : $0 \notin [1; +\infty[$

Donc $S_1 = \{1\}$

Cas 2 : $x \in]-\infty; 1[$; c - t - dire $x < 1$

Donc $|x - 1| = -(x - 1)$

$$x^2 - |x - 1| - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (x - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

On pose : $a = 1$; $b = 1$ et $c = -2$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

Donc $\Delta > 0$ d'où l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = -2 \quad \text{Or : } 1 \notin]-\infty; 1[$$

Donc $S_2 = \{-2\}$

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \{-2; 1\}$

4) Raisonnement par contraposition

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

Exercice 11

1) Soit $y \in \mathbb{R}$; montrer que : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que : $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

4) Soient $x; y \in]2; +\infty[$, montrer que $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Solution

1) Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

Soit $y \in \mathbb{R}$: Par contraposée montrons que

$$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$$

$$(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow 2y^2 = 8$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4$$

$$\Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$$

D'où : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

2) Montrons : $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

Soit : $x \in \mathbb{R}^+$; par contraposée montrons :

$$(\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2}) \Rightarrow (x = 0)$$

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{2+x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 2+x$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 &= (2+x)^2 \\ \Rightarrow 4(x+1) &= 4+4x+x^2 \\ \Rightarrow 4x+4-4-4x-x^2 &= 0 \\ \Rightarrow -x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

D'où : $(x \neq 0) \Rightarrow (\sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2})$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

Soit : $n \in \mathbb{N}$; par contraposée montrons :

si $(n \text{ est impair})$ alors $(n^2 \text{ est impair})$

On a : $n \text{ est impair donc } n = 2k + 1 ; k \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 = (2k + 1)^2$

Donc : $n^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k + 1$

Donc : $n^2 = 4k^2 + 2 \times 2k + 1$

Donc : $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Donc : n^2 est impair

D'où : si $(n^2 \text{ est pair})$ alors $(n \text{ est pair})$

3) Soient $x, y \in]2; +\infty[$, montrer que $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

Soient $x, y \in]2; +\infty[$;

Par contraposée montrons : $(x^2 - 4x = y^2 - 4y) \Rightarrow x = y$

$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - (y-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2+y-2)(x-2-y+2) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y-4)(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x+y-4 = 0 \text{ ou } x-y = 0$$

On a : $x, y \in]2; +\infty[$

Donc $x > 2$ et $y > 2$ donc $x+y > 4$

Donc $x+y-4 > 0$

Donc $x+y-4 \neq 0$

Donc $x-y = 0$

Donc $x = y$ D'où : $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 4x \neq y^2 - 4y)$

5) Raisonnement par l'absurde

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse (Q et $\bar{Q}$) (contradiction)

Donc on conclut que P est vraie

Exercice 12

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$

Solution

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

On suppose que : $(\exists x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3}$

$$\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(4x+1) = 4(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 12x+3 = 12x-8$$

$$\Leftrightarrow 3 = 8 \text{ Contradiction}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}) : \frac{4x+1}{3x-2} \neq \frac{4}{3}$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

On suppose que : $(\exists n \in \mathbb{N}) ; \frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N}$

$$\frac{6n+5}{4n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6n+5}{4n+2} = k ; \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 6n+5 = k(4n+2) ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 6n+4+1 = k(4n+2) ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 2(3n+2)+1 = 2k(2n+1) ; k \in \mathbb{N}$$

Or l'entier $2(3n + 2) + 1$ est impair et $2k(2n + 1)$ pair. Donc contradiction

D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{6n+5}{4n+2} \notin \mathbb{N}$

3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$

On suppose que $(\exists x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$

$$x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x^2 + 1}^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 1 \text{ Donc contradiction}$$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R}); x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$

6) Raisonement par récurrence

Principe de raisonnement

Soit $n \in \mathbb{N}$; et n_0 un entier naturel fixé

Pour montrer que la proposition $(\forall n \geq n_0); p(n)$ est vraie, on montre que :

➤ $p(n_0)$ est vraie

➤ La proposition $(\forall n \geq n_0); (p(n) \Rightarrow p(n + 1))$ est vraie

Exercice 13

Montrer par récurrence que ;

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5 \gg$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n \geq n$

Solution

1) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5$

➤ Pour $n = 1$ on a : $7^1 - 2^1 = 5$ et 5 est divisible par 5

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $7^n - 2^n$ est divisible par 5. Et montrons que $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

On a $7^n - 2^n$ est divisible par 5

Donc : $7^n - 2^n = 5k$; tel que $k \in \mathbb{N}$

Donc : $7^n = 5k + 2^n$; tel que $k \in \mathbb{N}$

Or: $7^{n+1} - 2^{n+1} = 7 \times 7^n - 2 \times 2^n$

$$= 7(5k + 2^n) - 2 \times 2^n$$

$$= 7 \times 5k + 7 \times 2^n - 2 \times 2^n$$

$$= 7 \times 5k + 5 \times 2^n$$

$$= 5(7k + 2^n)$$

Donc $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 5

➤ D'après le principe de récurrence on conclut que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ll 7^n - 2^n \text{ est divisible par } 5$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n \geq n$

➤ Pour $n = 0$ on a : $2^0 = 1 \geq 0$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $2^n \geq n$. Et montrons que : $2^{n+1} \geq n + 1$

On a : $2^n \geq n$ et on a $2 \geq 1$

Donc $2^n \geq n$ et $2^n \geq 1$

Donc: $2^n + 2^n \geq n + 1$

Donc: $2 \times 2^n \geq n + 1$

Donc: $2^{n+1} \geq n + 1$

D'après le principe de récurrence on conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq n$

Exercice 14 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) En déduire que $n(n+1)$ est pair

4) Calculer S_{100}

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = 1 + 2 + \dots + n$

1) Calculer S_1 ; S_2 et S_3

$$S_1 = 1 \quad ; \quad S_2 = 1 + 2 = 3 \quad \text{et} \quad S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

2) Montrer par récurrence que ;

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{➤ Pour } n = 1 \text{ on a : } 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$

➤ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Supposons que } 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Et montrons : } 1 + 2 + \dots + (n) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} * \quad 1 + 2 + \dots + (n) + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

➤ D'après le principe de récurrence en conclut que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) En déduire que $n(n+1)$ est pair

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ On a : } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Donc : } n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\text{Donc : } n(n+1) = 2k$$

(tel que $k = 1 + 2 + 3 + \dots + n \in \mathbb{N}$)

Donc $n(n+1)$ est pair

3) Calculer S_{100}

$$S_{100} = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Négation d'une propositions : $\bar{P}$

- La **négation** de la proposition P est la proposition noté $\bar{P}$ ou non P et qui est **vraie** si P est **fausse** et **fausse** si P est **vraie**

Conjonction : (P et Q) ; disjonction : (P ou Q)

- la proposition (P et Q) est vraie ssi P et Q sont toutes les **deux sont vraies**
- la proposition (P ou Q) est fausse SSI les deux propositions P et Q sont fausses

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

- la négation de (P et Q) est : ($\bar{P}$ ou $\bar{Q}$)
- la négation de (P ou Q) est : ($\bar{P}$ et $\bar{Q}$)

Implication: ($P \Rightarrow Q$) ; Equivalence: ($P \Leftrightarrow Q$)

- L'implication de P et Q est la proposition ($\bar{P}$ ou Q) ; noté par $P \Rightarrow Q$
- l'**équivalence** de deux propositions P et Q est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$) qu'on note par : $P \Leftrightarrow Q$ et qui est vraie ssi P et Q ont la même valeur de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

- la négation de ($P \Rightarrow Q$) est (P et $\bar{Q}$)
- Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est **vraie** on suppose que P est vraie et on **montre** que Q est vraie

Quantificateur : $\forall$; $\exists$

- Le quantificateur **pour tout** ou **quel que soit** est noté par : $\forall$.

La proposition ($\forall x \in E$); $p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie

- Le quantificateur **il existe au moins un** est noté par : $\exists$

la proposition ($\exists x \in E$); $p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- Le quantificateur **il existe un unique** est noté par : $\exists!$
la proposition $\exists! x \in E$; $p(x)$ est vraie lorsqu'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

- $\overline{(\forall x \in E); p(x)}$ est : $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$
- $\overline{(\exists x \in E); p(x)}$ est : $(\forall x \in E); \overline{p(x)}$

1) Résonnement par contre-exemple

Pour montrer que la proposition

($\forall x \in E$); $p(x)$ est **fausse** , il suffit de montrer que sa négation ($\exists x \in E$); $\overline{p(x)}$ est **vraie**

2) Résonnement par contraposition

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie

Pratiquement : on suppose que $\bar{Q}$ est vraie et on montre que $\bar{P}$ est vraie

3) Résonnement par disjonction des cas

Ce type consiste à appliquer la loi suivant :

$$[(P \text{ ou } R) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q \text{ et } R \Rightarrow Q]$$

Pratiquement : Pour montrer que la proposition

($\forall x \in E$); $p(x)$ est vraie on montre que $p(x)$ est vraie pour un partie A de E puis on montre que $p(x)$ est vraie pour les x n'appartenant pas à A

4) Résonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition P est vraie
On suppose que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraine une proposition fausse (Q et $\bar{Q}$) (**contradiction**) donc on conclut que P est vraie

5) Résonnement par Equivalence

Soient P ; Q et R des propositions

$$[(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [P \Leftrightarrow R \text{ et } R \Leftrightarrow Q]]$$

Pratiquement On établit l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ à l'aide d'une chaine d'équivalences successives

6) Résonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$; pour montrer que la proposition

($\forall n \geq n_0$); $p(n)$ est vraie , on montre que :

- $p(n_0)$ est vraie
- ($\forall n \geq n_0$); $[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ est vraie

Pratiquement : on suit les trois étapes suivantes

- **Initialisation** : Pour $n = n_0$, on vérifie que la proposition $p(n_0)$ est vraie
- **Hérédité** : fixons un $n \geq n_0$
Supposons que $p(n)$ est vraie et montrons que $p(n+1)$ est vraie
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence en conclut que :
($\forall n \geq n_0$); $p(n)$ est vraie