

Chapitre 1 : Notion de logique

Activité : Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux
$15 \times 2 = 30$		
$2 \times 3 + 4 = 10$		
$-6 \notin \mathbb{N}$		
2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$.		
Chaque nombre impair et un nombre premier.		

I) Propositions – Fonction propositionnelle

Exemples :

- Le texte mathématique (P): $-2 \in \mathbb{N}$, a un sens faux, donc on dit que (P) est **une proposition fausse**
- (Q): "Pour tous x dans $\mathbb{R}$; $x^2 \geq 0$ " est un texte mathématique qui a un sens vrai , On dit (Q) est une proposition vraie
- (T): $x \in \mathbb{R}$; $x^2 - 1 = 0$; ce texte dépend d'un paramètre x appartient à l'ensemble $\mathbb{R}$; on ne peut pas dire est-ce-que (T) est vrai ou faux

Mais par exemple pour la valeur 1 ou -1 , le texte (T) devient une proposition vraie et pour les autres valeurs de $\mathbb{R}$ le texte (T) devient une proposition fausse

Le texte (T) est appelé **une fonction propositionnelle** qui est toujours dépend d'un paramètre d'un ensemble (ou des paramètres)

1) Proposition

Définition

On appelle une proposition un énoncé des mots qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps)

Valeur de vérité d'une proposition

Si la proposition est vraie on note V ou 1

Si la proposition est fausse on note F ou 0

2) Fonction propositionnelle

Définition

Une fonction propositionnelle est une expression contenant une ou plusieurs variables , qui appartiennent à des ensembles déterminés

Si on remplace les variables par un élément de ces ensembles , la fonction proposée devient une proposition

II) Opérations sur les propositions :

1) Négation d'une proposition : $\bar{P}$

Définition :

La négation de la proposition P est la proposition noté $\bar{P}$ ou non P et qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie

Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈
Sa négation	≤	≥	<	>	≠	∉

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemples :

Proposition : P	Négation : $\bar{P}$
(P): $\pi \in \mathbb{N}$	$\overline{(P)}$: $\pi \notin \mathbb{N}$
(P): $1 + 2 = 5$	$\overline{(P)}$: $1 + 2 \neq 5$
(P): $\sqrt{2} > 1$	$\overline{(P)}$: $\sqrt{2} \leq 1$

2) Conjonction de deux propositions : (P et Q) ; disjonction (P ou Q)

Définitions

Soient P et Q deux propositions

- La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition noté (P et Q) ou bien $(P \wedge Q)$ et qu'est vraie ssi P et Q sont toutes les deux sont vraies
- La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition noté (P ou Q) ou bien $(P \vee Q)$, et qu'est fausse ssi les deux propositions P et Q sont fausses.

Tableau de vérité de : (P et Q) et (P ou Q)

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemples :

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ ou $(3 \text{ divise } 12)$ est vraie.
- La proposition : $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ et $(3 \text{ divise } 12)$ est vraie.

Propriété : (Lois de MORGAN)

- La négation de la proposition (P et Q) est la proposition $(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
 $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$
- La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$
 $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$

3) Implication de deux propositions (P ⇒ Q)

Définition :

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q.

Tableau de vérité de : $(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemples :

- La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ est fausse.
- La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ est vraie.
- La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ est vraie.
- La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ est vraie.

Remarque :

- La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$
- La négation de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition : $(P \text{ et } \bar{Q})$
- Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vrai, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie.
- Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ ont la même valeur de vérité.

4) L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».

$P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple :

Soient a et b deux nombres réels

Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Donc on a l'équivalence suivant $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$.

Application :

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1 : 3 \text{ est impair} \Leftrightarrow 3 = 5$.
- $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10 \text{ est pair}$.
- $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$.
- $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0$.

III) Quantificateur universel: $\forall$ - Quantificateur existentiel : $\exists$

1) Quantificateur universel: $\forall$

Définition

- 'Pour tous' ou 'quel que soit' est appelé Quantificateur universel et il est noté par $\forall$
- La proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie lorsque , pour tout $x \in E$ on a : $p(x)$ est vraie $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

2) Quantificateur existentiel : $\exists$

Définition

- 'il existe au moins un' est appelé quantificateur existentiel et il est noté par $\exists$
- La proposition $(\exists x \in E); p(x)$ est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie
- Le quantificateur "**il existe un unique**" est noté par : $\exists!$
- La proposition $\exists! x \in E; p(x)$ est vraie s'il existe un seul $x \in E$ tel que $p(x)$ soit vraie

Propriétés :

$$\overline{(\forall x \in E); p(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E); \overline{p(x)}$$

$$\overline{(\exists x \in E); p(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E); \overline{p(x)}$$

3) Lois logiques :

Définition : Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions que la constitue.

IV) Types de Raisonnement

1) Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est fausse, il suffit de montrer que sa négation $(\exists x \in E); \overline{p(x)}$ est vraie

Exemple :

$(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2} = x$ est fausse

car sa négation $(\exists x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2} \neq x$ est vrai pour $x = -1$

2) Raisonnement par implication – raisonnement déductif

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie , on suppose que P est vrai et on montre que Q est vrai.

Si P et $(P \Rightarrow Q)$ sont vraies alors Q est vraie

Exemple :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$;

$$(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

Donc : $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$

3) Raisonnement par équivalence

Principe de raisonnement

Si $(A \Leftrightarrow B_1)$ et $(B_1 \Leftrightarrow B_2)$ et $(B_2 \Leftrightarrow B_3)$ et ... $(B_n \Leftrightarrow B)$ alors $(A \Leftrightarrow B)$

(Les équivalences successives)

Si les équivalences suivantes $(A \Leftrightarrow B_1)$ et $(B_1 \Leftrightarrow B_2)$ et $(B_2 \Leftrightarrow B_3)$ et ... $(B_n \Leftrightarrow B)$ sont tous vraies et la proposition A est vraie,

Alors la proposition B est vraie.

Exemple :

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in \mathbb{R}; \text{ on a : } 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Puisque la proposition $x^2 \geq 0$ est vrai alors la proposition $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ est vraie

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$

4)Raisonnement par disjonction des cas

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition $(\forall x \in E); p(x)$ est vraie

On montre que $p(x)$ est vraie pour une partie A de E puis on montre que $p(x)$ est vraie pour les x n'appartenant pas à A

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$; Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Utiliser les cas $(n = 2k)$ et $(n = 2k + 1)$

Cas 1 : n est pair donc $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k)^2 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 2k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Cas 2 : n est pair donc $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k + 1)^2 + 2k + 1 + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 2 \\ &= 4k^2 + 6k + 3 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) + 1 \end{aligned}$$

Donc l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n^2 + n + 1$ est impair

5) Raisonnement par contraposition

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie on montre que la proposition

$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

Exemple :

Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^+$; montrer que : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

Soit $y \in \mathbb{R}$; il suffit de montrer que : $(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$

On a : $(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow 2y^2 = 8$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{8}{2}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4$$

$$\Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$$

D'où : $(2y^2 - 8 = 0) \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -2)$

Par contraposée : $(y \neq 2 \text{ et } y \neq -2) \Rightarrow (2y^2 - 8 \neq 0)$

6) Raisonnement par l'absurde

Principe de raisonnement

Pour montrer que la proposition P est vraie , on suppose que $\bar{P}$ est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse (Q et $\bar{Q}$) (contradiction)

Donc on conclut que P est vraie

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2+2}{x^2+1} \neq 1$

On suppose que: $(\exists x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1$

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+2 = x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 = x^2+1$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 \text{ (Contradiction)}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2+2}{x^2+1} \neq 1$

7) Raisonnement par récurrence

Principe de raisonnement

Soit $n \in \mathbb{N}$; et n_0 un entier naturel fixé

Pour montrer que la proposition $(\forall n \geq n_0) ; p(n)$ est vraie , on montre que :

➤ $p(n_0)$ est vraie

➤ La proposition $(\forall n \geq n_0) ; (p(n) \Rightarrow p(n+1))$ est vraie

Exemple :

Montrer que : $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a : $3^{2 \times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 4.

Supposons que : $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors : $3^{2n} - 1 = 4k$

Et on montre que : $3^{2(n+1)} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } 3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1$$

$$= 3^{2n} \times 3^2 - 1$$

$$= (1 + 4k) \times 9 - 1$$

$$= 36k + 8$$

$$= 4(9k + 2)$$

$$= 4k' \text{ avec } k' = 9k + 2$$

D'après le principe de récurrence $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$